MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II - POLI

1ª prova - 15/09/2008

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
TOTAL	

Nome: _____ Turma: ___

Nº USP: _____

Justifique todas as suas afirmações.

1. **(2,5)** Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

   (a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 de f em torno de $x_0 = 0$.

   (b) Usando (a), encontre um valor aproximado para $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^{\frac{11}{4}}}dx$ e mostre que o erro cometido é menor do que 10^{-4}.

Questão 1

A1 - A2

(a) $f(x) = (1+x)^{-1}$; $f'(x) = -1(1+x)^{-2}$; $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$; $f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$

$\Rightarrow f(0) = 1$; $f'(0) = -1$; $f''(0) = 2$; $f'''(0) = -6$.

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f em torno de $x_0 = 0$ é

$$\boxed{P(x) = 1 - x + x^2 - x^3}$$

(b) $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^{11/4}}\,dx \approx \int_0^{1/2} P\left(x^{11/4}\right)dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[1 - x^{11/4} + x^{\frac{11}{2}} - x^{\frac{33}{4}}\right]dx =$$

$$= \left[x - \frac{4}{15}x^{\frac{15}{4}} + \frac{2}{13}x^{\frac{13}{2}} - \frac{4}{37}x^{\frac{37}{4}}\right]\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{15}\,\frac{1}{2^{\frac{15}{4}}} + \frac{2}{13}\cdot\frac{1}{2^{13/2}} - \frac{4}{37}\,\frac{1}{2^{37/4}}.$$

Estimativa do erro: Usando a fórmula de Taylor,

$$\left|\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^{11/4}}\,dx - \int_0^{1/2} P\left(x^{11/4}\right)dx\right| \le \int_0^{1/2} \left|f\left(x^{11/4}\right) - P\left(x^{11/4}\right)\right|dx$$

$$= \int_0^{1/2} \left|f^{(4)}(\bar{x})\right| \frac{\left(x^{11/4} - 0\right)^4}{4!}\,dx$$, para algum $\bar{x}$ entre 0 e $\left(\frac{1}{2}\right)^{11/4}$.

Como $\bar{x} > 0$ e $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$, temos $\left|f^{(4)}(\bar{x})\right| < 24$.

Assim,

a última integral é menor do que

$$\int_0^{1/2} \cancel{24}\cdot\frac{x^{11}}{\cancel{24}}\,dx = \frac{x^{12}}{12}\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2^{12}} < \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1000} = 10^{-4}.$$

A

2. **(2,5)** Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a curva parametrizada definida por

$$\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, 2t^3 - 3t^2).$$

(a) Estude o comportamento dos vetores tangentes.

(b) Analise a concavidade.

(c) Verifique se existem pontos de auto-intersecção.

(d) Calcule os limites necessários e esboce a imagem de γ.

(a) $x(t) = t^3 - 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$

$y(t) = 2t^3 - 3t^2 \Rightarrow y'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$

		0	1	2
x'	+	−	−	+
x	→	←	←	→
y'	+	−	+	+
y	↑	↓	↑	↑
γ'	↗	↙	↖	↗

$t = 1$ $\gamma'(1) = (-3, 0)$ tangente horizontal

$t = 2$ $\gamma'(2) = (0, 12)$ tangente vertical

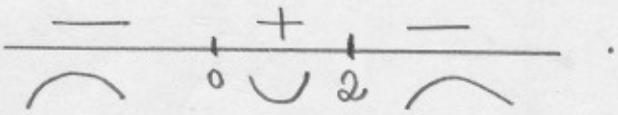
Em $t = 0$, $\gamma'(0) = (0,0)$. Se $t \neq 0, 2$ então $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ é o coeficiente angular da reta tangente à trajetória de γ em $\gamma(t)$.

No caso, $m(t) = \frac{6t(t-1)}{3t(t-2)}$, $t \neq 0, 2$. Calculando $\lim_{t \to 0} m(t) = \lim_{t \to 0} \frac{2(t-1)}{t-2} = 1$

obtemos que quando $t = 0$, a reta tangente à trajetória em $\gamma(0) = (0,0)$ tem coeficiente angular igual a 1.

(b) A concavidade é determinada pelo sinal de $\frac{m'(t)}{x'(t)}$, $t \neq 0, 2$.

$m'(t) = \frac{2[t-2-(t-1)]}{(t-2)^2} = -\frac{2}{(t-2)^2} < 0$. Assim, o sinal de $\frac{m'(t)}{x'(t)}$ é



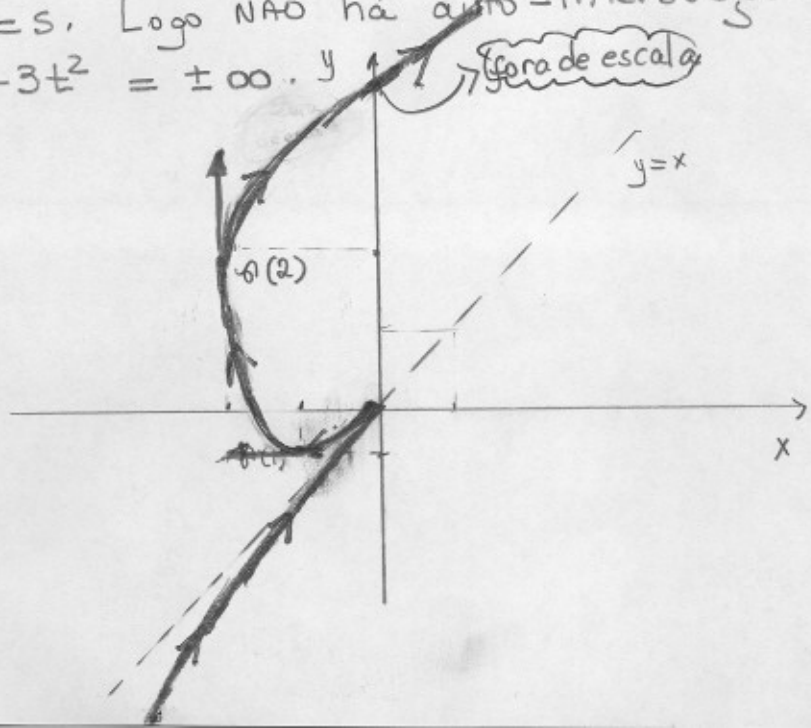
(c) Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ com $\gamma(t) = \gamma(s)$. Então

$$\left.\begin{array}{l} t^3 - 3t^2 = s^3 - 3s^2 \Rightarrow t^3 - s^3 = 3(t^2 - s^2) \\ 2t^3 - 3t^2 = 2s^3 - 3s^2 \Rightarrow 2(t^3 - s^3) = 3(t^2 - s^2) \end{array}\right\} \Rightarrow t^3 - s^3 = 2(t^3 - s^3)$$

$\Rightarrow t^3 - s^3 = 0 \Rightarrow t = s$. Logo NÃO há auto-intersecção.

(d) $\lim_{t \to \pm\infty} t^3 - 3t^2 = \lim_{t \to \pm\infty} 2t^3 - 3t^2 = \pm\infty$.

t	$\gamma(t)$
0	$(0,0)$
1	$(-2,-1)$ tangente horizontal
2	$(-4,4)$ tangente vertical
3	$(0,27)$ intersecção com o eixo y
$\frac{9}{2}$	$(-27/8, 0) \approx$ intersecção com o eixo x
	$(-3{,}3, 0)$



3. **(1,5)** Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^4}{x^2-y^4}$.

(a) Encontre o domínio de f e descreva suas curvas de nível.

(b) Esboce as curvas de nível dos níveis $c = -1, c = 1$ e $c = 2$. O que acontece quando $c = \frac{1}{2}$?

(c) Determine a imagem de f.

(a) Domínio de f: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^4\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y^2 \text{ e } x \neq -y^2\}$

Curvas de nível:

$f(x,y) = c \iff x^2 \neq y^4$ e $x^2 + y^4 = c(x^2 - y^4) \iff$

$\iff x^2 \neq y^4$ e $x^2(c-1) = y^4(c+1)$

Se $(c-1).(c+1) < 0$, isto é, se $-1 < c < 1$, não existe (x,y) com $f(x,y) = c$

Se $c = 1$, a curva de nível é

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^4 \text{ e } y^4 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ e } x \neq 0\}$

Se $c = -1$, a curva de nível é

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^4 \text{ e } x^2 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y \neq 0\}$

Se $c > 1$ ou $c < -1$ então $\dfrac{c+1}{c-1} < 0$ e temos que

$x^2(c-1) = y^4(c+1) \iff x^2 = \dfrac{c+1}{c-1} y^4 \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{c+1}{c-1}}\, y^2$

Nesse caso, a curva de nível é

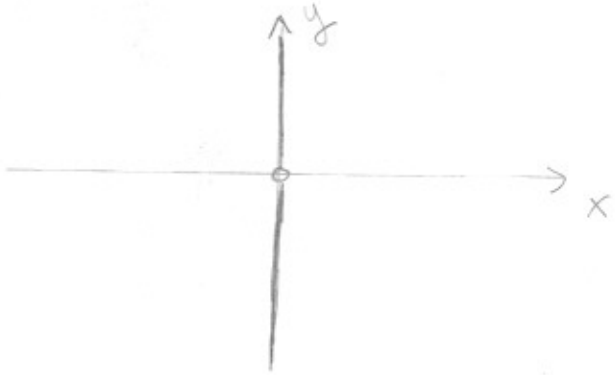
$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^4,\ x = \sqrt{\dfrac{c+1}{c-1}}\, y^2 \text{ ou } x = -\sqrt{\dfrac{c+1}{c-1}}\, y^2\right\}$

Note que, se $c > 1$ ou $c < -1$ então $0 < \dfrac{c+1}{c-1} \neq 1$ e portanto $x = \pm\sqrt{\dfrac{c+1}{c-1}}\, y^2$ então

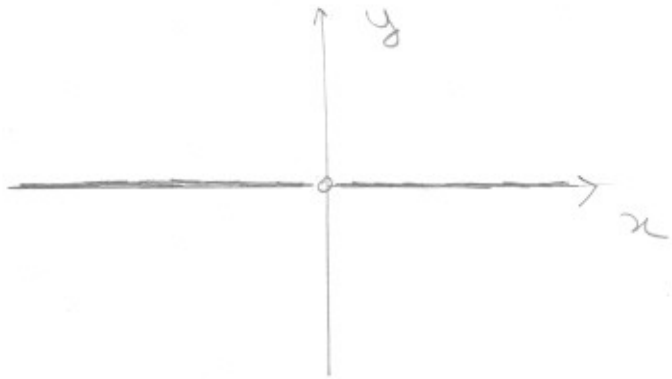
$x^2 = \dfrac{c+1}{c-1} y^4 \neq y^4$ se $y \neq 0$. Assim, a curva de nível é $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0,\ x = \sqrt{\dfrac{c+1}{c-1}}\, y^2 \text{ ou } x = -\sqrt{\dfrac{c+1}{c-1}}\, y^2\right\}$

(b) Quando $c = 1/2$, como visto em (a), não existe (x,y) com $f(x,y) = c$

Para $c = -1$

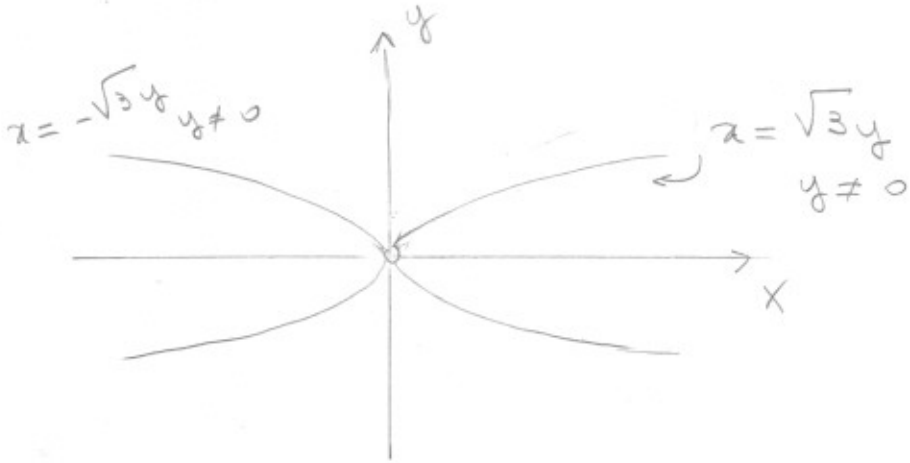


Para $c = 1$



Para $c = 2$, $\dfrac{c+1}{c-1} = 3$,

$x = \pm\sqrt{3}\, y^2$



(c) c está na imagem de $f \iff$ existe (x,y) com $f(x,y) = c$.

Assim, como visto em (a), a imagem de f é a reunião dos intervalos $]-\infty,-1]$ e $[1,\infty[$

4. **(2,0)** Calcule ou mostre que não existe:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

(a) Sejam $f(x,y)=\dfrac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$, $\gamma_1(t)=(t,2t)$ e $\gamma_2(t)=(t,3t)$. Temos que: $\gamma_1(0)=(0,0)=\gamma_2(0)$; γ_1 e γ_2 são contínuas; $\gamma_1(t)\neq(0,0)$ e $\gamma_2(t)\neq(0,0)$ se $t\neq 0$ e, para $t\neq 0$, $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ estão no domínio de f pois, para $t\neq 0$, $t^3.2t-t.(2t)^3=-6t^4\neq 0$ e $t^3.3t-t(3t)^3=-24t^4\neq 0$. Como

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t))=\lim_{t\to 0}\frac{t^3.2t+2^4t^4+t^4}{t^3 2t-t\,2^3t}=\lim_{t\to 0}\frac{-19}{6},$$

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t))=\lim_{t\to 0}\frac{t^3 3t+3^4t^4+t^4}{t^3 3t-t\,3^3t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{-85}{24} \quad \text{e}$$

$$\frac{-19}{6}=\frac{-76}{24}\neq\frac{-85}{24}$$ então <u>não existe</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

(b) i) $$\frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}=\frac{\dfrac{x^3}{x^2+y^2}+\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}{\dfrac{y^4}{x^2+y^2}+\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} \quad \text{se } (x,y)\neq(0,0)$$

ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}x=0$ pois $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x=0$ e $\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1$

iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x^2+y^2}=0$ pois $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2=0$ e $\left|\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1$

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$ pois $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$ e $x^2+y^2 \neq 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$

Logo, por i) ii) iii).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4 + \operatorname{sen}(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x^3}{x^2+y^2} + \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}{\dfrac{y^4}{x^2+y^2} + \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}$$

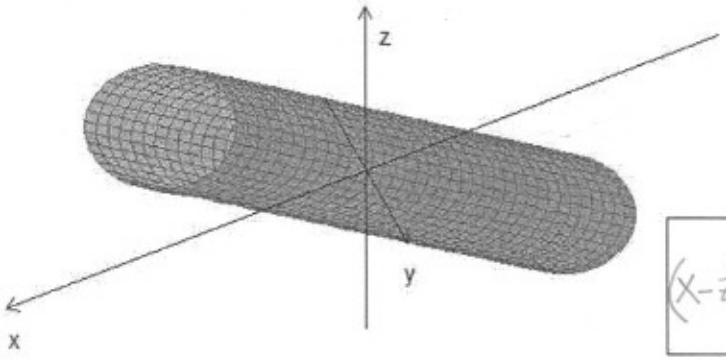
$$= \frac{0+1}{0+1} = 1$$

5. **(1,5)** Cada uma das figuras abaixo representa uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Em cada caso, escolha na *lista de equações* a equação que corresponde à superfície da figura. Escreva a equação escolhida no retângulo ao lado da figura correspondente.
Observação: Não é preciso justificar. Apenas as respostas serão consideradas.

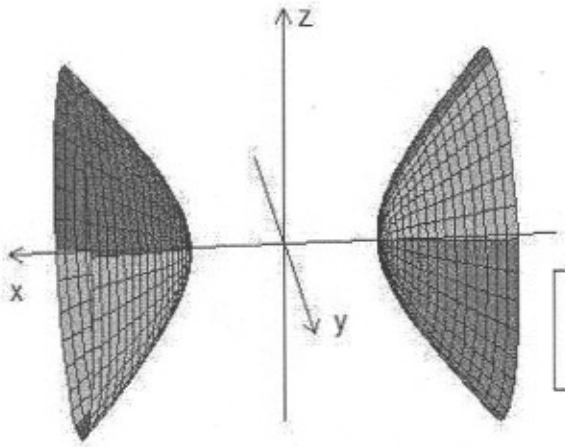
Lista de Equações

$$z = x + y^2 \qquad z = y^2 - x^2 \qquad (x-z)^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 = 1 + \frac{1}{1+y^2+z^2}$$

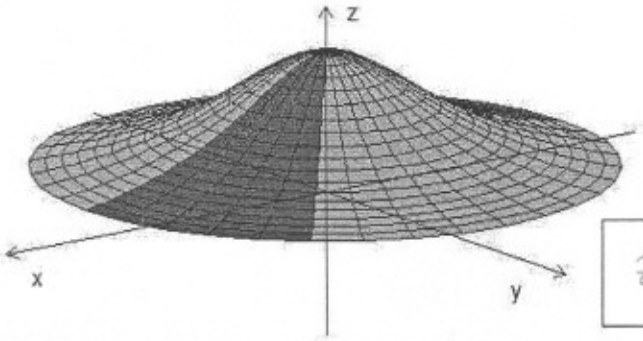
$$z = 1 - x^2 - y^2 \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 1 \qquad z = \frac{1}{1+x^2+y^2} \qquad -x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$(x-z)^2 + y^2 = 1$



$x^2 - y^2 - z^2 = 1$



$z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$