Gabarito - P2

24 de julho de 2021

Dissertativa (Versão 1). *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $f(0)=0$ *e* $f(-1/3)=-1/2$*;*

(ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$*;*

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$*;*

(iv) f *é derivável até segunda ordem em* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$*;*

(v) Existe uma função contínua $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tal que* $g(x)>0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$ *e*

$$f'(x)=g(x)\frac{3x+1}{x^{2/3}},\forall x\neq 0;$$

(vi) Existe uma função contínua $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tal que* $h(x)>0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$ *e*

$$f''(x)=h(x)\frac{9x^2+6x-2}{x^{5/3}},\forall x\neq 0.$$

(a) Usando a Regra de L'Hospital para calcular o limite, decida se f é derivável em $x=0$ e determine, em caso afirmativo, $f'(0)$.

(b) Estude f em relação a seus intervalos de crescimento e decrescimento, intervalos de concavidade, pontos de máximo e mínimo locais e globais e pontos de inflexão.

(c) Esboce o gráfico de f.

Solução:

(a) Como f é contínua e $f(0)=0$, podemos aplicar a Regra de L'Hospital para calcular

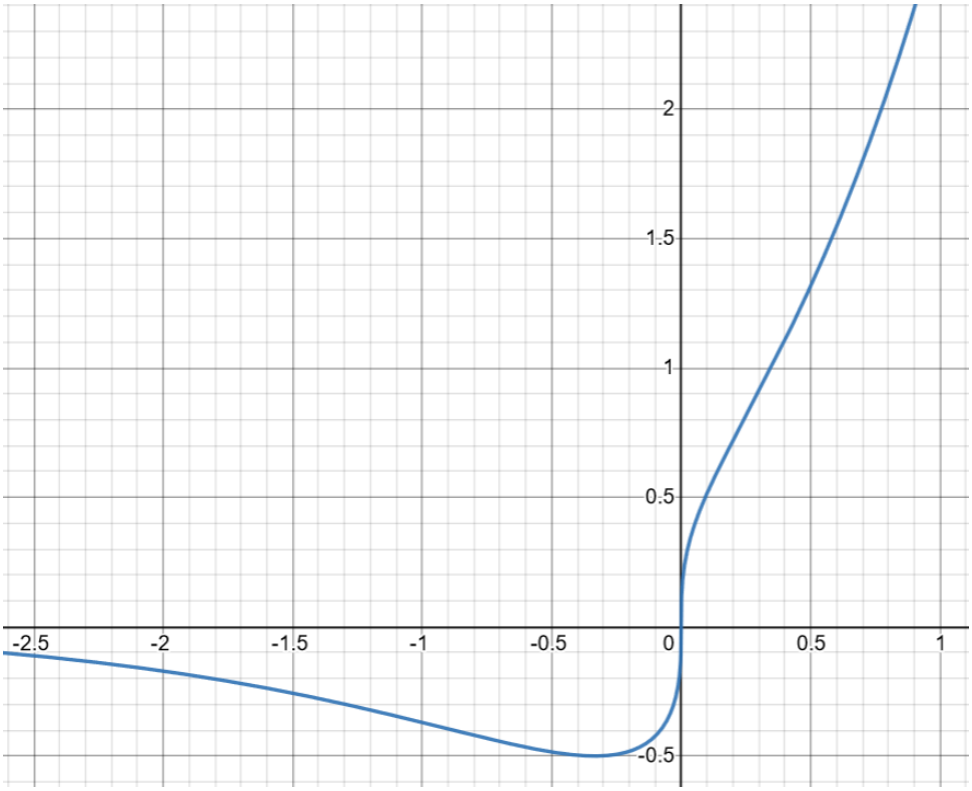
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)(3x+1)}{x^{2/3}}=+\infty,$$

pois o numerador tende a $g(0)>0$ e o denominador tende a 0 e é estritamente positivo. Logo, f não é derivável em $x=0$.

(b) O polinômio $p(x)=3x+1$ possui $-1/3$ como sua única raiz e é estritamente crescente. Como $x^{2/3}$ é estritamente positivo se $x\neq0$, concluímos que $f'(x)<0$ se $x<-1/3$ e $f'(x)>0$ se $-1/3<x<0$ ou $x>0$. A continuidade de f nos permite deduzir que f é estritamente decrescente em $]-\infty,-1/3]$ e estritamente crescente em $[-1/3,+\infty[$. O ponto $x=-1/3$ é o único ponto de mínimo local de f (e é mínimo global). f não possui pontos de máximo locais.

O polinômio $q(x)=9x^2+6x-2$ possui duas raízes reais: $x_1=(-1-\sqrt{3})/3$ e $x_2=(-1+\sqrt{3})/3$. Comparando os sinais de q e de $x^{5/3}$, concluímos que f'' é estritamente negativa nos intervalos $]-\infty,x_1[$ e $]0,x_2[$, e estritamente positiva em $]x_1,0[$ e $]x_2,+\infty[$. Logo, f tem concavidade para baixo nos dois primeiros intervalos e para cima nos dois últimos. Os pontos $x=0$, $x=x_1$ e $x=x_2$ são pontos de inflexão de f.

(c) O gráfico de f tem o seguinte aspecto:



Dissertativa (Versão 2). *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $f(0)=0$ *e* $f(1/3)=-1/2$*;*

(ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$*;*

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$*;*

(iv) f *é derivável até segunda ordem em* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$*;*

(v) Existe uma função contínua $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tal que* $g(x)>0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$ *e*

$$f'(x)=g(x)\frac{3x-1}{x^{2/3}},\forall x\neq 0;$$

(vi) Existe uma função contínua $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tal que* $h(x)>0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$ *e*

$$f''(x)=h(x)\frac{-9x^2+6x+2}{x^{5/3}},\forall x\neq 0.$$

(a) Usando a Regra de L'Hospital para calcular o limite, decida se f é derivável em $x=0$ e determine, em caso afirmativo, $f'(0)$.

(b) Estude f em relação a seus intervalos de crescimento e decrescimento, intervalos de concavidade, pontos de máximo e mínimo locais e globais e pontos de inflexão.

(c) Esboce o gráfico de f.

Solução:

(a) Como f é contínua e $f(0)=0$, podemos aplicar a Regra de L'Hospital para calcular

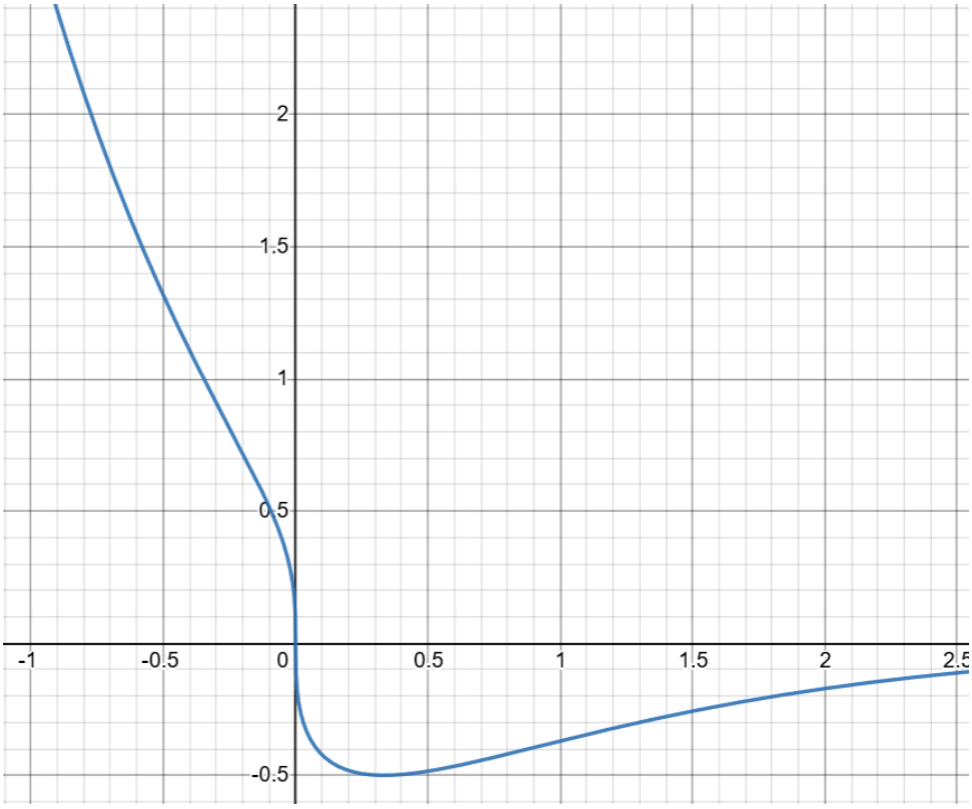
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)(3x-1)}{x^{2/3}}=-\infty,$$

pois o numerador tende a $-g(0)<0$ e o denominador tende a 0 e é estritamente positivo. Logo, f não é derivável em $x=0$.

(b) O polinômio $p(x)=3x-1$ possui $1/3$ como sua única raiz e é estritamente crescente. Como $x^{2/3}$ é estritamente positivo se $x\neq0$, concluímos que $f'(x)<0$ se $x<0$ ou $0<x<1/3$ e $f'(x)>0$ se $x>1/3$. A continuidade de f nos permite deduzir que f é estritamente decrescente em $]-\infty,1/3]$ e estritamente crescente em $[1/3,+\infty[$. O ponto $x=1/3$ é o único ponto de mínimo local de f (e é mínimo global). f não possui pontos de máximo locais.

O polinômio $q(x)=-9x^2+6x+2$ possui duas raízes reais: $x_1=(1-\sqrt{3})/3$ e $x_2=(1+\sqrt{3})/3$. Comparando os sinais de q e de $x^{5/3}$, concluímos que f'' é estritamente positiva nos intervalos $]-\infty,x_1[$ e $]0,x_2[$, e estritamente negativa em $]x_1,0[$ e $]x_2,+\infty[$. Logo, f tem concavidade para cima nos dois primeiros intervalos e para baixo nos dois últimos. Os pontos $x=0, x=x_1$ e $x=x_2$ são pontos de inflexão de f.

(c) O gráfico de f tem o seguinte aspecto:



Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável satisfazendo as seguintes propriedades:

- $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
- $f(0) = 0$;
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Considere também a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x)e^{1/f(x)}$. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa:

A equação $g(x) = 2$ possui ao menos uma solução real.	Falsa ✔
A equação $g(x) = 5$ possui exatamente duas soluções reais.	Verdadeira ✔
A função g possui ao menos um ponto de máximo local.	Verdadeira ✖
A equação $f(x) = 1$ possui exatamente uma solução real. A solução desta equação é um número real estritamente positivo.	Verdadeira ✔
A função g possui um único ponto de mínimo local.	Verdadeira ✔

Sua resposta está parcialmente correta.

Você selecionou corretamente 4.
A primeira propriedade garante que f é estritamente crescente e, portanto, injetora. Em particular, f se anula apenas na origem. Além disso, como f é contínua e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, pelo Teorema do Valor Intermediário sabemos que existe um único número real p tal que $f(p) = 1$. De acordo com o crescimento de f, p é estritamente positivo. Logo, a afirmação "A equação $f(x) = 1$ possui exatamente uma solução real. A solução desta equação é um número real estritamente positivo" é **verdadeira**.

Para estudar as outras afirmações, estudamos a derivada de g:

$$g'(x) = f'(x)e^{1/f(x)}\left(1 - \frac{1}{f(x)}\right), \forall x \neq 0.$$

Os dois primeiros termos são estritamente positivos. Já a expressão $1 - 1/f(x)$ é estritamente positiva se, e somente se, $f(x) < 0$ ou $f(x) > 1$. Como f é estritamente crescente, $f(0) = 0$ e $f(p) = 1$, isto equivale a $x < 0$ ou $x > p$. Concluímos, portanto, que

$$g'(x) > 0, \forall x \in]-\infty, 0[\cup]p, +\infty[$$

e

$$g'(x) < 0, \forall x \in]0, p[.$$

Disto decorre que g é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]p, +\infty[$, e estritamente decrescente em $]0, p[$. Logo, $x = p$ é o único ponto de mínimo local de g e g não possui pontos de máximo locais.

As duas afirmações restantes são investigadas estudando o valor de g em seu mínimo local p, bem como seus limites quando x tende a $+\infty, -\infty, 0^+$ e 0^-. Estes limites valem, respectivamente, $+\infty, -\infty, +\infty$ e 0 (os dois primeiros e o quarto são imediatos e o último pode ser calculado usando a Regra de L'Hospital). Deste modo, $g(x) < 0$ para todo $x < 0$, e $g(x) \geq g(p) = e$, para todo $x > 0$. Como $0 < 2 < e$, a equação $g(x) = 2$ não possui solução; por outro lado, pelo Teorema do Valor Intermediário, a equação $g(x) = 5$ possui exatamente duas soluções (ambas pertencentes ao intervalo $]0, +\infty[$).

A resposta correta é:
A equação $g(x) = 2$ possui ao menos uma solução real.

→ Falsa,

A equação $g(x) = 5$ possui exatamente duas soluções reais.

→ Verdadeira,

A função g possui ao menos um ponto de máximo local.

→ Falsa,

A equação $f(x) = 1$ possui exatamente uma solução real. A solução desta equação é um número real estritamente positivo.

→ Verdadeira,

A função g possui um único ponto de mínimo local.

→ Verdadeira.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Suponha que f seja duas vezes derivável em $x = 0$ e que $f''(0) = 6$. Suponha ainda que $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$. O valor do limite $\lim_{x \to 0}(\sin(x^2) + 1)^{1/f(x)}$ é:

- a. $\sqrt[4]{e}$
- b. $\sqrt[6]{e}$
- c. $\sqrt[3]{e}$ ✔
- d. $\sqrt[5]{e}$
- e. $\sqrt{e}$

Sua resposta está correta.

Reescrevendo a expressão dada como $e^{\ln(\sin(x^2)+1)/f(x)}$, basta calcular o limite do expoente. Como tanto o numerador quanto o denominador tendem a 0, podemos aplicar a Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin(x^2) + 1)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos(x^2)}{\sin(x^2) + 1} \frac{1}{f'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos(x^2)}{\sin(x^2) + 1} \lim_{x \to 0} \frac{x}{f'(x)} = \frac{1}{3},$$

pois o primeiro limite é igual a 2 e o inverso da expressão que aparece no segundo limite tende, por definição, a $f''(0) = 6$. Logo, o limite pedido é igual a $\sqrt[3]{e}$.

A resposta correta é:
$\sqrt[3]{e}$

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_1^{x^4} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$. O valor da integral $\int_0^1 x^{11} F(x) dx$ é:

a. $\frac{1-\sqrt{2}}{12}$

b. $\frac{1-\sqrt{2}}{36}$

c. $\frac{1-\sqrt{2}}{24}$

d. $\frac{1-\sqrt{2}}{18}$

e. $\frac{1-\sqrt{2}}{30}$

Sua resposta está incorreta.

De acordo com o 2º Teorema Fundamental do Cálculo e com a Regra da Cadeia, F é derivável e

$F'(x) = \frac{4x^3}{\sqrt{1+x^{16}}}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Usando integração por partes, tomando $u = F(x)$ e $dv = x^{11} dx$, temos $du = F'(x) dx$ e $v = \frac{x^{12}}{12} dx$, de modo que

$$\int_0^1 x^{11} F(x) dx = \frac{x^{12} F(x)}{12}\Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^{15}}{\sqrt{1+x^{16}}} dx.$$

A primeira parcela do membro direito é igual a zero. Já a segunda parcela pode ser calculada via a substituição $t = 1 + x^{16}$. Com esta mudança, temos $dt = 16x^{15}$ e os extremos de integração tornam-se, respectivamente, 1 e 2. Logo,

$$\int_0^1 x^{11} F(x) dx = -\frac{1}{48} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{24} \sqrt{t}\Big|_1^2 = \frac{1-\sqrt{2}}{24}.$$

A resposta correta é:

$\frac{1-\sqrt{2}}{24}$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com derivada contínua, tal que $-1 < f(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(a) = 1/3$ e $f(b) = 1/2$, o valor da integral $\int_a^b \frac{f'(x)}{(1-(f(x))^2)^{3/2}} dx$ é:

a. $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{2\sqrt{30}}$

b. $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$ ✔

c. $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{15}}{6\sqrt{10}}$

d. $\frac{\sqrt{35}-\sqrt{24}}{2\sqrt{210}}$

e. $\frac{\sqrt{48}-\sqrt{35}}{4\sqrt{105}}$

Sua resposta está correta.

Fazendo a substituição $\sin u = f(x)$, obtemos $\cos u du = f'(x)dx$ e

$$\int \frac{f'(x)}{(1-(f(x))^2)^{3/2}} dx = \int \frac{\cos u}{(1-\sin^2 u)^{3/2}} du = \int \frac{\cos u}{\cos^3 u} du = \int \sec^2 u du = \tan u + c = \frac{\sin u}{\cos u} + c = \frac{f(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} + c.$$

Logo,

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{(1-(f(x))^2)^{3/2}} dx = \frac{f(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\Big|_a^b = \frac{1/2}{\sqrt{1-1/4}} - \frac{1/3}{\sqrt{1-1/9}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}.$$

A resposta correta é:

$\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$

Sejam $f(x) = \dfrac{\ln x}{16}$ e $g(x) = -\ln x$. A área da região limitada pelos gráficos de f e de g e pelas retas $x = \frac{1}{4}$ e $x = 4$ é igual a:

a. $\dfrac{17}{64}(30\ln 2 - 9)$

b. $\dfrac{65}{512}(189\ln 6 - 49)$

c. $\dfrac{5}{4}(3\ln 2 - 1)$

d. $\dfrac{82}{729}(160\ln 3 - 64)$

e. $\dfrac{10}{27}(8\ln 3 - 4)$

Sua resposta está correta.

A área pedida é igual a $\int_{1/4}^{4} |f(x) - g(x)|dx$. Os gráficos de f e de g se interceptam no ponto $(1, 0)$. No intervalo $[1/4, 1]$, temos $g(x) \geq f(x)$; já no intervalo $[1, 4]$, temos $f(x) \geq g(x)$. Deste modo,

$$\int_{1/4}^{4} |f(x) - g(x)|dx = \int_{1/4}^{1} (g(x) - f(x))dx + \int_{1}^{4} (f(x) - g(x))dx = -(1 + 1/16)\int_{1/4}^{1} \ln x dx + (1 + 1/16)\int_{1}^{4} \ln x dx.$$

A função $h(x) = x\ln x - x$ é uma primitiva de $\ln x$ (que pode ser encontrada usando integração por partes). Logo, a área procurada é

$$-\frac{17}{16}(x\ln x - x)\Big|_{1/4}^{1} + \frac{17}{16}(x\ln x - x)\Big|_{1}^{4} = \frac{17}{64}(30\ln 2 - 9).$$

A resposta correta é:
$\dfrac{17}{64}(30\ln 2 - 9)$

Considere a seguinte região do plano: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x - 3 \leq y \leq -x^2 + 1\}$. O volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta horizontal $y = -5$ é igual a:

a. 81π

b. 63π ✔

c. 117π

d. 99π

e. 135π

Sua resposta está correta.

Fazendo uma translação da região A e dos gráficos de f e de g de 5 unidades para cima, obtemos a região $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 2 \leq y \leq -x^2 + 6\}$ e as funções $F(x) = x^2 - 2x + 2$ e $G(x) = -x^2 + 6$. É claro que os volumes de A e de B são iguais. Notemos que os gráficos de F e de G se interceptam em $x = -1$ e $x = 2$. Além disso, no intervalo $[-1, 2]$, temos $G(x) \geq F(x) > 0$. Portanto, o volume da região B é igual a

$$\pi \int_{-1}^{2} (G(x))^2 dx - \pi \int_{-1}^{2} (F(x))^2 dx.$$

Integrando as funções $(F(x))^2 = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$ e $(G(x))^2 = x^4 - 12x^2 + 36$, obtemos a resposta 63π.

A resposta correta é:
63π

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \operatorname{sin} x \int_0^{\cos x} f(t)dt$. Sabendo que a reta tangente ao gráfico de F em no ponto $(\pi/4, F(\pi/4))$ tem equação $y = 6x + 1$, o valor de $f(\sqrt{2}/2)$ é:

a. $\pi - 2$

b. $\frac{3\pi}{2} - 4$ ✖

c. $3\pi - 10$

d. $\frac{5\pi}{2} - 8$

e. $2\pi - 6$

Sua resposta está incorreta.

Aplicando a Regra do Produto, a Regra da Cadeia e o 2º Teorema Fundamental do Cálculo, deduzimos que a derivada de F é

$F'(x) = \cos x \int_0^{\cos x} f(t)dt - \operatorname{sin}^2 x f(\cos x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Em particular, em $x = \pi/4$ temos

$F'(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} f(t)dt - \frac{f(\sqrt{2}/2)}{2}.$

Por outro lado, de acordo com o enunciado, a reta $y = 6x + 1 = 6(x - \pi/4) + 3\pi/2 + 1$ é tangente ao gráfico de F em $(\pi/4, F(\pi/4))$. Isto significa que $F(\pi/4) = 3\pi/2 + 1$ e $F'(\pi/4) = 6$. Como

$F(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} f(t)dt,$

concluímos que

$6 = \frac{3\pi}{2} + 1 - \frac{f(\sqrt{2}/2)}{2},$

de modo que $f(\sqrt{2}/2) = 3\pi - 10$.

A resposta correta é:
$3\pi - 10$