Questão **1**

Completo

Atingiu 2,30 de 3,00

Marcar questão

Seja $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2 \sin(x^3)}$. Determine, caso existam:

- $f'(0)$
- $f'(2)$
- $f'(-2)$

CamScanner 06-10-2021 18.36.pdf

1. Lembramos que $f'(0)$, caso exista, é dado por $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2\sin(x^3)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{(x-2)^2 \dfrac{\sin(x^3)}{x^3}} = \sqrt[3]{4}$. Logo, $f'(0) = \sqrt[3]{4}$.
2. Como acima, precisamos calcular $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2\sin(x^3)}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)^3}\sin(x^3)}$, que não existe, pois $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x^3) = \sin 1$ e $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2}{(x-2)^3} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$ não existe, pois $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty \neq -\infty \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2}$. Logo, $f'(2)$ não existe.
3. Existe um intervalo aberto em torno de $x_0 = -2$, (por exemplo $(-3,-1)$, no qual a expressão de f é obtida a partir de produtos e compostas de funções deriváveis em $x_0 = -2$, permitindo a aplicação das regras de derivação: $f'(x_0) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left((x_0-2)^2\sin(x_0^3)\right)^2}} \cdot \left(2(x_0-2)\sin(x_0^3) + (x_0-2)^2\cos(x_0^3)3x_0^2\right)$. Fazendo $x_0 = -2$, temos

$$f'(-2) = \frac{2\sin(8) + 48\cos(8)}{3\sqrt[3]{4\sin^2(8)}}.$$

Questão **1**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Marcar questão

O valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+7x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{3x+\sin x}$ é 4 ✔ e o valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x}}}$ é inexistente ✔

1. Dividindo numerador e denominador por x temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+7x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{3x+\sin x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5+7x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{3+\frac{\sin x}{x}} = 4$, pois $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (confronto) e $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$.
2. Para o segundo limite temos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{5+7x}}{|x|\sqrt[3]{3+x^2}}$, que não existe (laterais distintos).

Para que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 7x + 2, & \text{se } x > 1 \\ mx + n, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{se } x < -1 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$, o valor de $\frac{m}{n}$ deve ser

Escolha uma opção:

- a. $\frac{1}{3}$ ✔
- b. 1
- c. $\frac{1}{4}$
- d. -1
- e. $\frac{3}{4}$

Para que f seja contínua em toda a reta devemos ter $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (em particular os limites laterais em cada ponto coincidem).

1. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq \pm 1$, existe um intervalo aberto centrado em x_0 onde a expressão de f é um polinômio ou uma função trigonométrica, logo é contínua nesses pontos.
2. Se $x_0 = 1$, precisamos que $-2 = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = m + n = f(1)$.
3. Se $x_0 = -1$, precisamos que $-1 = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = -m + n = f(-1)$.

Assim temos $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$.

A resposta correta é: $\frac{1}{3}$

Seja $p \neq -2$ o único número real tal que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{-x}{x+2}$ no ponto $\big(p, f(p)\big)$ passa pelo ponto $(-2, 0)$. Então o valor de $f(p)$ é

Escolha uma opção:

- a. $\dfrac{1}{2}$
- b. -1
- c. 1 ✖
- d. $-\dfrac{1}{2}$
- e. 0

A reta tangente em questão tem equação $r\colon y = f(p) + f'(p)(x - p)$. Neste caso temos $f'(p) = \dfrac{-2}{(p+2)^2}$ e $f(p) = -\dfrac{p}{p+2}$ (valor que desejamos descobrir). Assim a reta toma a forma $r\colon y = f(p) + \dfrac{-2}{(p+2)^2}(x - p)$. Pedir que o ponto $(-2, 0)$ esteja nesta reta nos diz que $f(p) = \dfrac{-2(p+2)}{(p+2)^2}$, ou seja $-\dfrac{p}{p+2} = \dfrac{-2}{p+2}$, ou seja $p = 2$ e portanto $f(p) = f(2) = -\dfrac{1}{2}$.

A resposta correta é: $-\dfrac{1}{2}$

Seja $y = f(x)$ uma função, derivável em $x_0 = 1$, que é dada implicitamente por $ye^{x^2-1} + y^3x + x = 1 + 2e^{x-1}$. O valor de $f(1)$ é 1 ✔ e o valor de $f'(1)$ é -1/4 ✖

1. Da equação que define f, em $x = 1$, temos que $f(1) + f^3(1) = 2$, logo $f(1) = 1$
2. Derivando implicitamente num ponto x_0 temos $f'(x_0)e^{x_0^2-1} + 2x_0f(x_0)e^{x_0^2-1} + 3f(x_0)^2f'(x_0)x_0 + f(x_0)^3 + k = be^{x_0-1}$. Em $x_0 = 1$ isso dá $f'(1) = \frac{-1}{2}$.

Considere as funções $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $g(x) = mx + \sin x$, onde a, b, c, d e m são constantes reais e $a > 0$. Decida a veracidade das afirmações abaixo:

Se $b^2 - 3ac = 0$, então f possui um único ponto crítico que não é ponto de máximo ou de mínimo local.	{Verdadeira} ✔
Se $b^2 - 3ac > 0$, então f possui exatamente um ponto de máximo e um ponto de mínimo local.	{Verdadeira} ✔
A derivada de g é uma função limitada.	{Verdadeira} ✔
Se $m \leq -1$, então g é estritamente crescente.	{Falsa} ✔
Se $b^2 - 3ac < 0$, então f é estritamente decrescente.	{Falsa} ✔

1. Falsa, pois $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ tem discriminante $4(b^2 - 3ac)$ que, se negativo garante $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo f é estritamente crescente.
2. Verdadeira. Aproveitando a observação acima, a condição garante que $f'(x) \geq 0$ (uma única raiz dupla) e portanto, sempre crescente, com um único ponto crítico.
3. Verdadeira. Agora $f'(x)$ tem duas raízes reais, sendo negativa somente no intervalo entre essas raízes. Uma análise do crescimento da função garante o resultado.
4. Verdeira. $g'(x) = m + \cos(x)$, logo $|g'(x)| \leq |m| + 1$.
5. Falsa, pois se $m \leq -1$, então $g'(x) = m + \cos(x) \leq 0$, logo g não pode ser estritamente crescente.

A resposta correta é: Se $b^2 - 3ac = 0$, então f possui um único ponto crítico que não é ponto de máximo ou de mínimo local.
→ {Verdadeira}, Se $b^2 - 3ac > 0$, então f possui exatamente um ponto de máximo e um ponto de mínimo local.
→ {Verdadeira}, A derivada de g é uma função limitada.
→ {Verdadeira}, Se $m \leq -1$, então g é estritamente crescente.
→ {Falsa}, Se $b^2 - 3ac < 0$, então f é estritamente decrescente.
→ {Falsa}.

Um triângulo possui dois de seus lados iguais a 3cm e 8cm e o terceiro lado l variando com o tempo. Em um certo instante, o lado l mede 7cm e está aumentando a uma taxa de $2\sqrt{3}$cm/s. Determine a taxa com a qual o ângulo oposto ao lado l está variando neste mesmo instante.

Escolha uma opção:

- a. $\frac{7}{4}$
- b. 0
- c. $\frac{7}{6}$ ✔
- d. $\frac{7\sqrt{3}}{6}$
- e. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

Usando a lei dos cossenos temos que $l^2(t) = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos\theta(t) \implies 2l(t)l'(t) = 48\theta'(t)\sin\theta(t)$. No instante t_0 em que $l(t_0) = 7$, temos $\cos\left(\theta(t_0)\right) = \frac{1}{2} \implies \sin\left(\theta(t_0)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e então $\theta'(t_0) = \frac{7}{6}$.

A resposta correta é: $\frac{7}{6}$

Considere todos os triângulos retângulos cujos catetos estão contidos nos eixos coordenados e que a hipotenusa contém o ponto $(3,2)$. A menor área que um desses triângulos pode ter é

Escolha uma opção:

- a. 24
- b. 6
- c. 18
- d. 12 ✔
- e. 36

A reta que passa pelos pontos $(3,2)$ e $(x_0,0)$, $x_0>3$, tem equação $y=\frac{2x}{3-x_0}-\frac{2x_0}{3-x_0}$, cujos interceptos com os eixos coordenados são x_0 e $\frac{2x_0}{x_0-3}$. Deste modo a área do triângulo é $A(x_0)=\frac{x_0^2}{x_0-3}$, cuja derivada é $A'(x_0)=\frac{x_0(x_0-6)}{(x_0-3)^2}$. O único ponto crítico no intervalor proposto é $x_0=6$, que é de mínimo (analise o sinal a derivada). O valor da área nesse ponto é $A(x_0)=12$.

A resposta correta é: 12