GABARITO DA PROVA TIPO B

1. Sobre as retas que contém o ponto $(-2/3, 7/3)$ e que são tangentes ao gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 1$, podemos afirmar que:

   (a) São duas retas e os pontos de tangência são: $(0, 1)$ e $(-1, 2)$.

   (b) São duas retas e os pontos de tangência são: $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

   (c) Só tem uma reta e seu seu coeficiente angular é $-2/3$.

   (d) São três retas e os pontos de tangência são: $(-1, 2)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

   (e) Só tem uma reta e sua equação é $2x + y - 1 = 0$.

   SOLUÇÃO. *A equação da reta tangente ao gráfico de* f *num ponto* $(x_0, f(x_0))$ *é:* $y - (x_0^3 - 2x_0 + 1) = (3x_0^2 - 2)(x - x_0)$. *Substituindo* $x = -2/3$ *e* $y = 7/3$ *nessa equação, obtemos:* $2x_0^2 + 2x_0 = 0$. *Portanto,* $x_0 = 0$ *ou* $x_0 = -1$. *Como* $f(0) = 1$ *e* $f(-1) = 2$, *concluímos que existem duas retas tangentes e seus pontos de tangência são:* $(0, 1)$ *e* $(-1, 2)$. *Resposta a.*

2. Considere a função abaixo e assinale a afirmação correta.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   (a) f não é contínua em $x = 0$ mas é derivável em $x = 0$.

   (b) f não é contínua e também não é derivável em $x = 0$.

   (c) f é contínua em $x = 0$ mas não é derivável em $x = 0$.

   (d) f é contínua e é derivável em $x = 0$.

   (e) Nenhuma das outras afirmações está correta.

   Solução. $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$, *já que* $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *é limitada e* x^2 *tende a* 0. *Como* $f(0) = 0$, *temos que* f *é contínua em* $x = 0$.

   $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$, *já que* $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *é limitada e* x *tende a* 0. *Logo,* f *é derivável em* $x = 0$ *e* $f'(0) = 0$. *Resposta d.*

3. Assinale a **alternativa incorreta** sobre a função F dada a seguir:

$$F(x) = \int_0^{4x^3-9x^2} e^{-t^2}\, dt, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

 (a) $F(x) \leq 0$ para $x \in [0, 1]$.
 (b) $x = 1$ é ponto de mínimo local de F.
 (c) F é crescente no intervalo $]-\infty, 0[$.
 (d) F é decrescente no intervalo $]0, 3/2[$.
 (e) $F(3) \leq 27$.

 Solução. *Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a derivada de F é $F'(x) = (12x^2 - 18x)\, e^{-(4x^3-9x^2)^2}$, $\forall\, x \in \boldsymbol{R}$. Estudando o sinal de F' obtemos que F é crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[3/2, \infty[$ e decrescente em $[0, 3/2]$. Com isso já é possível responder ao teste, já que $x = 1$ não é ponto de mínimo local de F. Resposta b.*

4. Considere as 2 equações abaixo:

$$\begin{array}{l}\text{(i)}\cos(x) + \sec(x) = 3\\ \text{(ii)}\cos(x) + \sec(x) = 2\end{array}$$

 Para $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, o número de soluções das equações é, respectivamente:

 (a) 2 e 2
 (b) 1 e 0
 (c) 0 e 1
 (d) 1 e 2
 (e) 2 e 1

 Solução. *Considere $f(x) = cos(x) + sec(x)$. Daí, $f'(x) = -sen(x) + sen(x)/cos^2(x) = sen(x)(-1 + 1/cos^2(x))$. A parte da direita da expressão é sempre positiva. Logo, no intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$, a função f decresce em $]-\pi/2, 0]$ e cresce em $[0, \pi/2[$. O ponto de mínimo ocorre em $x = 0$ e o valor mínimo é $f(0) = 2$. Observe também que a função vai para $+\infty$ para x tendendo a $\pm\pi/2$. Esboçando o gráfico de f, fica claro que $f(x) = 3$ tem duas soluções no intervalo e $f(x) = 2$ tem uma única solução. Resposta e.*

1. (4,0) Calcule:

$$a)\int_0^1 x^3\sqrt{4-4x^2}\,dx \qquad b)\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{x-2}\,e^{\frac{1}{x-2}} \qquad c)\int (\sqrt{x}+\frac{2}{x})\,\ln x\,dx$$

Solução. a)

$$\int_0^1 x^3\sqrt{4-4x^2}\,dx = \int_0^1 (2x)x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_1^0 (1-u)\sqrt{u}\,du =$$

$$= \int_0^1 u^{1/2}\,du - \int_0^1 u^{3/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/4}\Big]_0^1 - \frac{2}{5}u^{5/2}\Big]_0^1 = \frac{4}{15}$$

Foi feita a substituição $u = 1-x^2$, *que tem como consequência:* $-2x\,dx = du,\ x^2 = 1-u,\ x=0 \leftrightarrow u=1$ *e* $x=1 \leftrightarrow u=0.$

Também pode ser resolvida com a substituição $x = sen(t)$ *que cai na integral*

$$2\int_0^{\pi/2}\big(\cos^2(t)\mathrm{sen}(t) - \cos^4(t)\mathrm{sen}(t)\big)\,dt = -\frac{2}{3}\cos^3\Big]_0^{\pi/2} + \frac{2}{5}\cos^5\Big]_0^{\pi/2} = \frac{4}{15}$$

b) *Este limite é o mesmo que caiu na P2, na questão do gráfico.*

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{x-2}\,e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2^-}(x-1)\frac{\frac{1}{x-2}}{e^{-\frac{1}{x-2}}}$$

Para resolver $\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{x-2}}{e^{-\frac{1}{x-2}}}$, *podemos usar L'Hôpital para o caso* ∞/∞, *já que* $\lim_{x\to 2^-} 1/(x-2) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^-} e^{-\frac{1}{x-2}} = +\infty$*:*

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{x-2}}{e^{-\frac{1}{x-2}}} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-\frac{1}{(x-2)^2}}{\frac{e^{-\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^-} -e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

Como $\lim_{x\to 2^-} x-1 = 1$, *concluímos que o limite pedido é zero.*

c) *Usando integração por partes, obtemos:*

$$\int (\sqrt{x}+\frac{2}{x})\ \mathrm{ln}x\,dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2}+2\mathrm{ln}(x)\right)\mathrm{ln}x - \int \frac{2}{3}x^{1/2}+2\frac{\mathrm{ln}(x)}{x}\,dx =$$

$$\left(\frac{2}{3}x^{3/2}+2\mathrm{ln}(x)\right)\mathrm{ln}x - \frac{4}{9}x^{3/2} - (\mathrm{ln}(x))^2 + c,\ c \in \mathbf{R} =$$

$$\frac{2}{3}x^{3/2}\mathrm{ln}x + (\mathrm{ln}(x))^2 - \frac{4}{9}x^{3/2} + c,\ c \in \mathbf{R}$$

2. (2,0) Considere a família de parábolas da forma

$$y = ax^2 - (1+a^2)x,$$

com $a < 0$. Determine, se houver, para qual número real $a < 0$, a parábola tem vértice mais à esquerda (abscissa do vértice mínima). E mais à direita (abscissa do vértice máxima)?

Solução. *A abscissa do vértice da parábola é $(1+a^2)/2a$. Considero a função $f(a) = (1+a^2)/2a$. Devo decidir se f tem máximo e mínimo no intervalo $]-\infty, 0[$.*

A derivada de $f'(a) = (a^2-1)/(2a^2)$, mostra que f é crescente no intervalo $]-\infty,-1]$ e decrescente no intervalo $[-1,0[$. Para $a=-1$ temos o ponto de máximo no intervalo $]-\infty,0[$ e não existe ponto de mínimo, já que

$$\lim_{a\to-\infty}(1+a^2)/2a = \lim_{a\to-\infty}\frac{a^2}{2a}(1/a^2+1) = -\infty$$

Conclusão: nessa família de parábolas, o vértice com abscissa mais à direita se dá para $a=-1$ e o vértice, nesse caso, tem abscissa $f(-1)$ que também é -1. O vértice com abscissa mais à esquerda não existe, já que a abscissa tende a $-\infty$ se a tende para $-\infty$ (e também se a tende para 0^-).