MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Gabarito da P1 — Prova: ○ ○ ● ● ○ ○ ● ○

Testes

e - b - d - c

Questões Dissertativas

Questão 1 (Valor: 1,2 ponto)**.** Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^3(\sqrt{x^3+1+x^2}-1)}{3x^2 \operatorname{sen} x^3}$. Não serão aceitas soluções que usem a regra de l'Hôpital (para quem já a conhece).

Solução. $\dfrac{2x^3(\sqrt{x^3+1+x^2}-1)}{3x^2 \operatorname{sen} x^3} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^3+1+x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{\sqrt{x^3+1+x^2}+1}{\sqrt{x^3+1+x^2}+1} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}}\cdot\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+1+x^2}+1}$. Pelo limite trigonométrico fundamental e pelo teorema sobre limites de funções compostas, conclui-se que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} = 1$; daí, pelas regras operacionais para limites conclui-se que o limite pedido existe e vale $\frac{1}{3}$.

Questão 2 (Valor: 2,0 pontos)**.** Uma partícula se movimenta ao longo de uma reta real segundo a função horária $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(t) = \dfrac{f(t^4)}{2f(t^4)^2+1}$, com $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável e unidades no sistema MKS. Supondo $f(1) = f'(1) = 1$, calcule a velocidade da partícula no instante $t = 1$.

Solução. Usando-se as regras operacionais para a derivada e a regra da cadeia, bem como a diferenciabilidade de f, conclui-se que g é derivável e, para todo $t\in\mathbb{R}$: $g'(t) = \dfrac{f'(t^4)\cdot 4t^3\cdot(2f(t^4)^2+1) - f(t^4)\cdot[4f(t^4)\cdot f'(t^4)\cdot 4t^3]}{(2f(t^4)^2+1)^2}$. Substituindo-se $t=1$, $f(1)=f'(1)=1$, obtém-se $g'(1) = \frac{4\cdot 3 - 4\cdot 4}{3^2} = -\frac{4}{9}$.

Questão 3 (Valor: 2,0 pontos)**.** Encontre a reta tangente à curva $x^2y(x+3y) = x^2+3y^2$ no ponto $(1,1)$. Admita que a referida curva define implicitamente $y = y(x)$ como função diferenciável de x em algum intervalo aberto contendo 1 e de forma que $y(1) = 1$.

Solução. Para todo $x\in\operatorname{dom} y$, o ponto $(x, y(x))$ pertence à referida curva, i.e. $x^2\cdot y(x)\cdot[x+3y(x)] = x^2+3y(x)^2$. Equivalentemente, a função $F:\operatorname{dom} y\to\mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^2\cdot y(x)\cdot[x+3y(x)] - [x^2+3y(x)^2]$ se anula identicamente, portanto sua derivada se anula identicamente. Por outro lado, pelo fato de ser y derivável, pela regra da cadeia e pelas regras operacionais para a derivada, obtém-se, para todo $x\in\operatorname{dom} y$: $F'(x) = 2x\cdot y(x)\cdot[x+3y(x)] + x^2\cdot y'(x)\cdot[x+3y(x)] + x^2\cdot y(x)\cdot[1+3y'(x)] - 2x - 6y(x)\cdot y'(x)$, o que deve se anular identicamente. Em particular, para $x=1$ e $y(1)=1$, obtém-se $8 + 4\cdot y'(1) + [1+3y'(1)] - 2 - 6y'(1) = 0$, o que é equivalente a $y'(1)+7 = 0$, logo $y'(1) = -7$. A reta pedida é, pois, a reta tangente ao gráfico de y no ponto $(1, y(1))$, i.e. aquela que passa por $(1,1)$ e que tem coeficiente angular -7, i.e. a reta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y - 1 = -7(x-1)\}$.