Resolução da Lista 3 de Cálculo Diferencial e Integral I

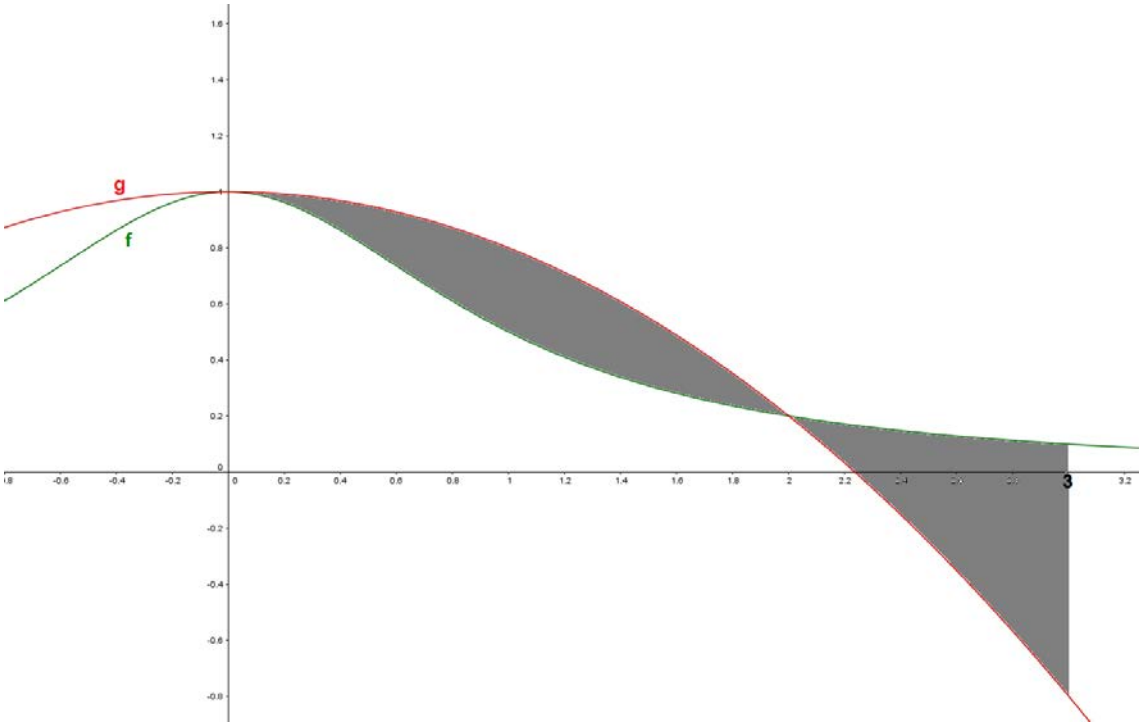
Por César Morad

2016

1. APLICAÇÕES DE INTEGRAL DEFINIDA – CÁLCULO DE ÁREAS

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad g(x) = 1 - \frac{x^2}{5}$

Ao analisarmos o gráfico, nota-se que a função g(x) é maior que f(x) no intervalo]0,2[e menor que f(x) no intervalo]2,3], portanto devemos subtrair f(x) de g(x) em]0,2[e subtrair g(x) de f(x) em]2,3], e em seguida integrar as funções resultantes nos respectivos intervalos.



$$A = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\,dx + \int_2^3 [f(x) - g(x)]\,dx$$

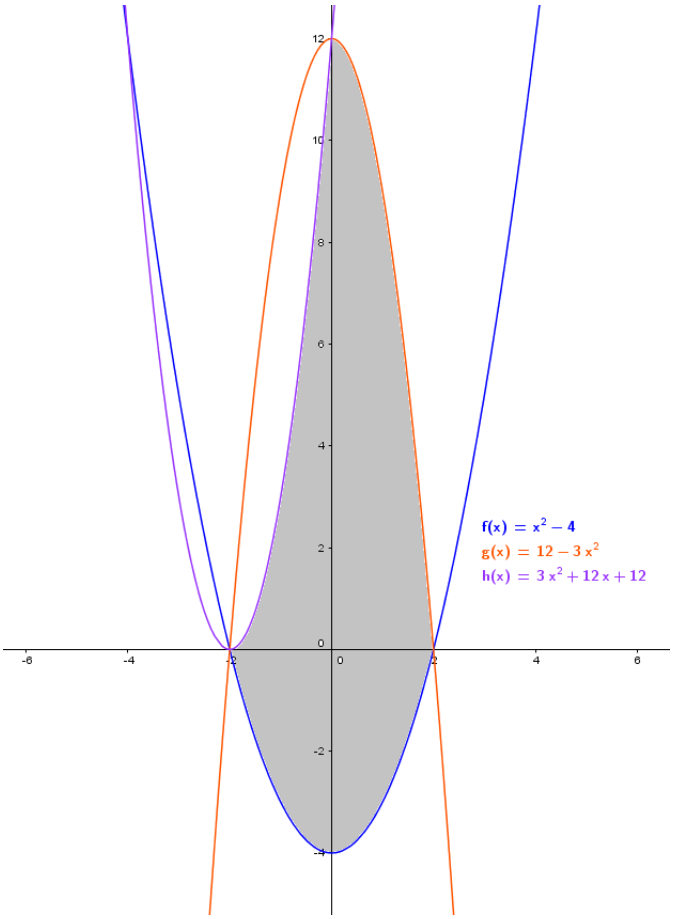
$$A = \int_0^2 \left[1 - \frac{x^2}{5} - \frac{1}{1+x^2}\right] dx + \int_2^3 [\frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{5}]\,dx$$

$$A = -arctan\,x + x - \frac{x^3}{15}\Big|_0^2 + arctan\,x - x + \frac{x^3}{15}\Big|_2^3$$

$$A = -arctan\,2 + 2 - \frac{8}{15} + arctan\,3 - 3 + \frac{27}{15} - arctan\,2 + 2 - \frac{8}{15}$$

$$\boldsymbol{A = arctan\,3 - 2arctan\,2 + \frac{26}{15}}$$

2. a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq x^2 - 4, y \leq 12 - 3x^2 \text{ e } y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$



A região A é possui uma área delimitada por três funções, que chamaremos de f, g e h respectivamente. Quando for pedido um y maior ou igual à função, queremos apenas a área acima da curva; quando y for menor ou igual à função, queremos a área abaixo da curva. A figura acima é a única possibilidade, visto que é capaz de obedecer a todos os três requisitos do enunciado. Entre x = -2 e x = 0 a área que queremos é a área entre h e f, e entre x = 0 e x = 2 a área que queremos é aquela entre g e f, portanto:

$$A = \int_{-2}^{0} [h(x) - f(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{0} [3x^2 + 12x + 12 - x^2 + 4]\,dx + \int_{0}^{2} [12 - 3x^2 - x^2 + 4]\,dx$$

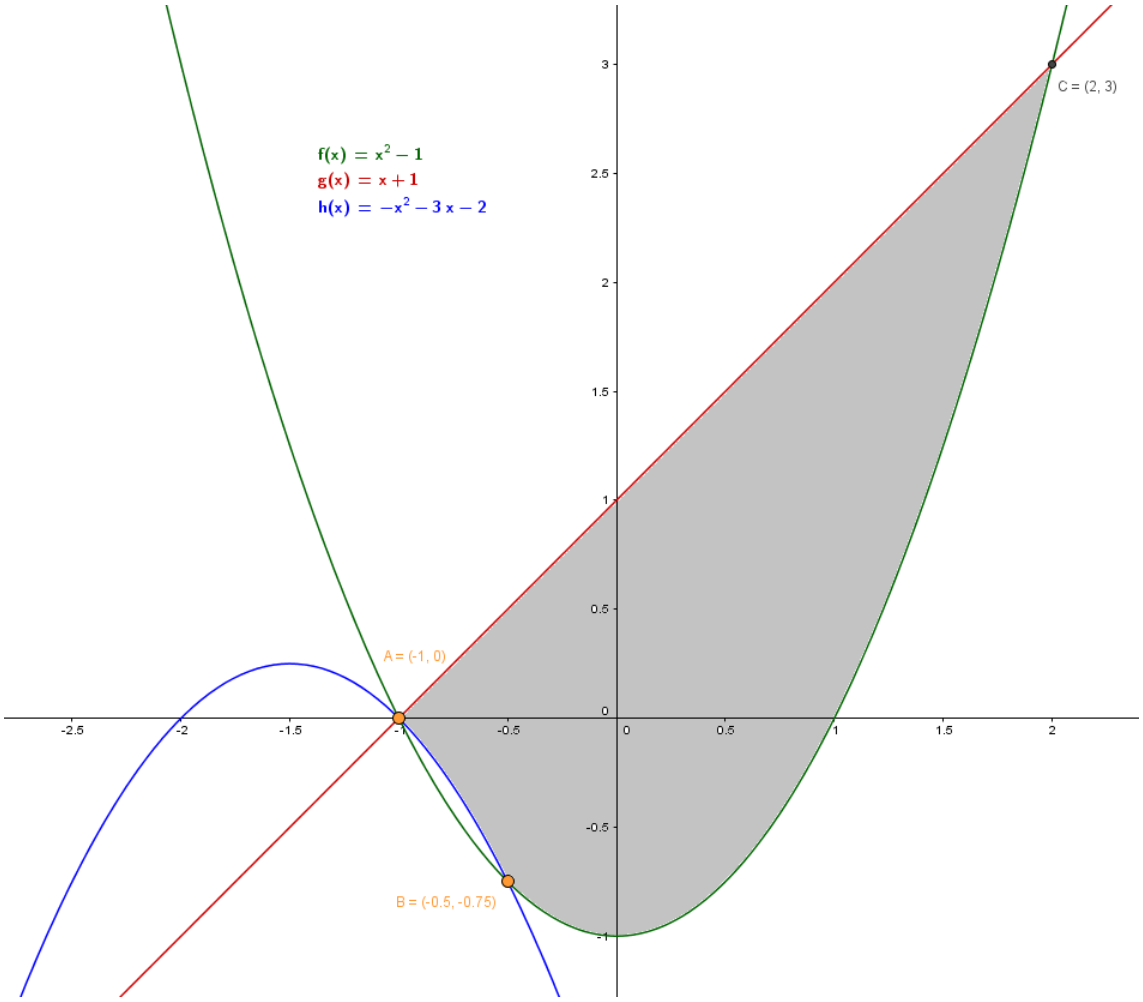
$$A = x^3 + 6x^2 + 12x - \frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{-2}^{0} + 12x - x^3 - \frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{0}^{2}$$

$$A = \frac{2x^3}{3} + 6x^2 + 16x \Big|_{-2}^{0} + 16x - \frac{4x^3}{3} \Big|_{0}^{2}$$

$$A = \left[0 - \left(-\frac{16}{3} + 24 - 32\right)\right] + \left[\left(32 - \frac{32}{3}\right) - 0\right]$$

$$\boldsymbol{A = \frac{104}{3}}$$

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq x^2 - 1, y \leq x + 1 \text{ e } y \geq -x^2 - 3x - 2\}$



Para descobrirmos a área hachurada, podemos calcular a área entre a reta g e função f (verde) e depois subtrair a área entre a função h (azul) e a f.

$$A = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx - \int_{-1}^{-0,5} [h(x) - f(x)]\,dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} [x + 1 - x^2 + 1]\,dx - \int_{-1}^{-0,5} [-x^2 - 3x - 2 - x^2 + 1]\,dx$$

$$A = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} - \left(-\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - x\Big|_{-1}^{-0,5}\right)$$

$$A = -\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2(2) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right)$$

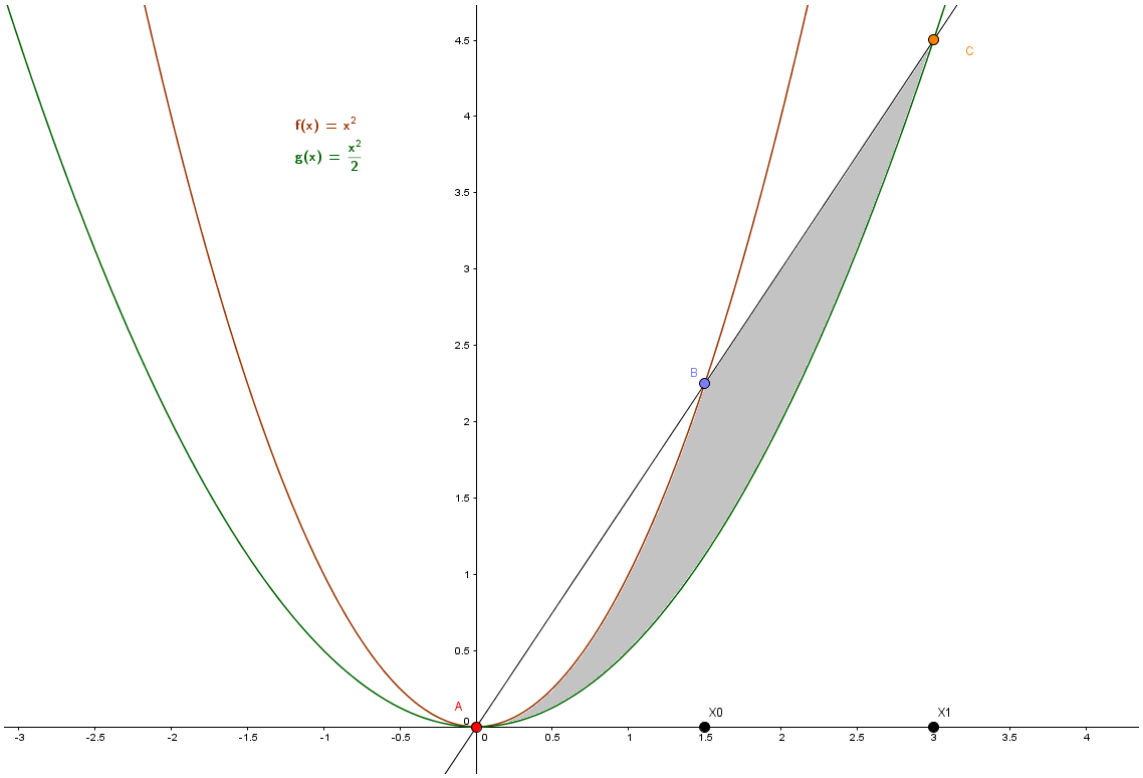
$$- \left[-\frac{2(-0,5)^3}{3} - \frac{3(-0,5)^2}{2} - (-0,5) - \left(-\frac{2(-1)^3}{3} - \frac{3(-1)^2}{2} - (-1)\right)\right]$$

$$A = \frac{9}{2} - \frac{1}{24}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{107}{24}}$$

3. $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = mx$, A = 4

Sejam as funções acima f, g e h respectivamente. Escolhi um m arbitrário apenas para a visualização do gráfico:



É possível ver que a área pode ser calculada através da subtração da área pequena (vazia) entre h e f da área grande (entre h e g, de x = 0 a x = X1).

$$A = \int_0^{X1} (h(x) - g(x))\,dx - \int_0^{X0} (h(x) - f(x))\,dx$$

$$4 = \int_0^{X1} (mx - \frac{x^2}{2})\,dx - \int_0^{X0} (mx - x^2)\,dx$$

Para que a reta mx cruze as funções f e g nos pontos X0 e X1, é necessário que h(X0)=f(X0) e h(X1)=g(X1), logo:

$$mX0 = X0^2 \Rightarrow X0 = m$$

$$mX1 = \frac{X1^2}{2} \Rightarrow X1 = 2m$$

Portanto:

$$4 = \frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\Big|_0^{2m} - \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{m}\right)$$

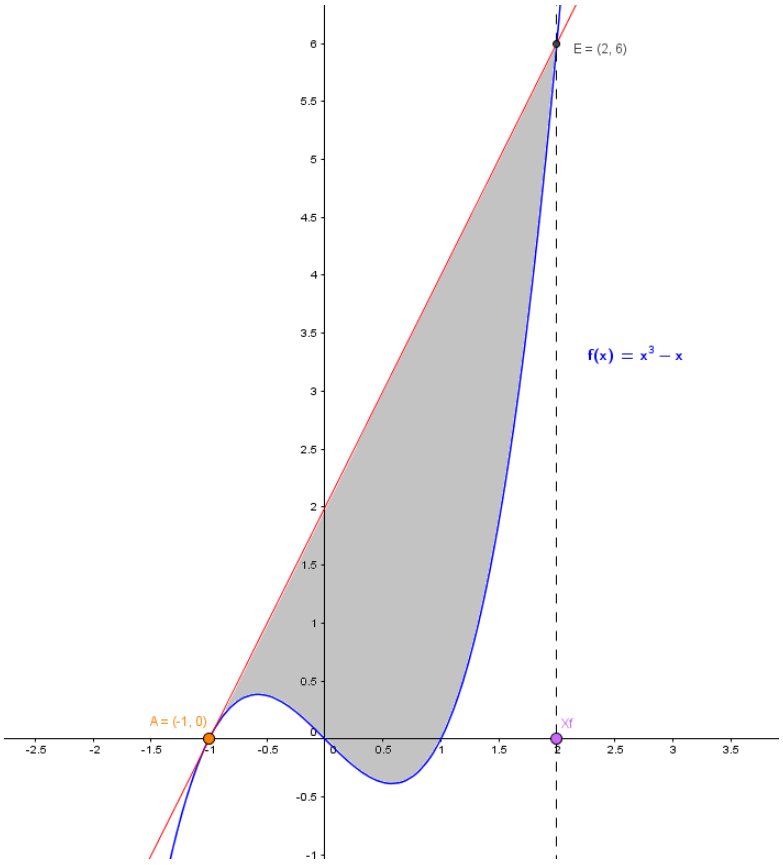
$$4 = \frac{2m^3}{3} - \frac{m^3}{6}$$

$$m^3 = 8$$

$$\boldsymbol{m = 2}$$

4. $y = x^3 - x, g(x) = mx + k$

Seja a função g a reta tangente à y no ponto x = -1, e seja y = f(x):



No ponto de tangência, o valor das funções se iguala:

$$g(-1) = f(-1)$$
$$m(-1) + k = (-1)^3 - (-1)$$
$$-m + k = 0 \Rightarrow m = k \Rightarrow y = m(x + 1)$$

Repetindo o processo descobriremos m:

$$g(x) = f(x)$$
$$m(x + 1) = x^3 - x$$
$$m(x + 1) = x(x + 1)(x - 1)$$
$$m = x^2 - x$$
$$x = -1 \Rightarrow m = (-1)^2 - (-1) \Rightarrow m = 2$$

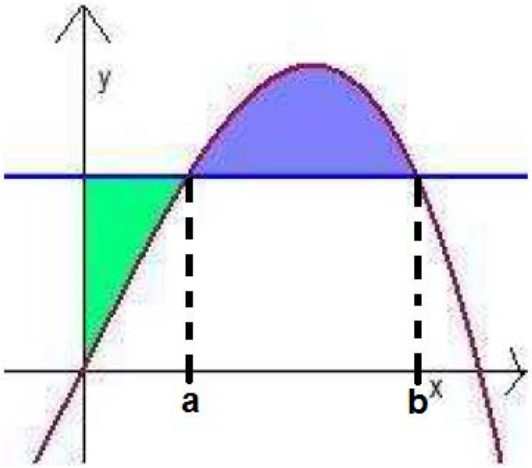
Como as funções se igualam em dois pontos, repetimos o processo uma terceira vez:

$$g(x) = f(x)$$
$$2(x + 1) = x(x + 1)(x - 1)$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \; ou \; x = 2$$

Calculemos então a área:

$$A = \int_{-1}^{2} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)\, dx$$
$$A = \frac{-x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^{2} = \mathbf{\frac{27}{4}}$$

5. $f(x) = 2x - 3x^3, y = c$ (Resolução da professora Deborah).



Preciso escolher **a** que torna as áreas iguais:

$f(a) = 2a - 3a^2$ será o "c" escolhido

$$Área = a(2a - 3a^3) - \int_0^a (2x - 3x^3)\,dx$$

$$Área = \int_a^b (2x - 3x^3)\,dx - (b - a)(2a - 3a^3)$$

Igualando estas áreas e usando que $2b - 3b^3 = 2a - 3a^3 (= c)$ obtemos:

$$a(2a - 3a^3) - \left(x^2 - \frac{3}{4}x^4\right)\Big|_0^a = x^2 - \frac{3}{4}x^4\Big|_a^b - (b - a)(2a - 3a^3)$$

$$a(2a - 3a^3) - \left(a^2 - \frac{3}{4}a^4\right) = \left(b^2 - \frac{3}{4}b^4\right) - \left(a^2 - \frac{3}{4}a^4\right) - b(2a - 3a^3) + a(2a - 3a^3)$$

$$\left(b^2 - \frac{3}{4}b^4\right) = b(2a - 3a^3) = b(2b - 3b^3)$$

$$b^2 - \frac{3}{4}b^4 = 2b^2 - 3b^4$$

$$4b^2 - 9b^4 = 0$$

$$b = 0 \;\; ou \;\; \boldsymbol{b = \frac{2}{3}} \;\; ou \;\; b = -\frac{2}{3}$$

Se $b = \frac{2}{3}$:

$$c = f(b) = 2b - 3b^3$$

$$= \frac{4}{3} - 3 * \frac{8}{27}$$

$$= \boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

6. $\int_0^1 x + \sqrt{1-x^2}\,dx$ (*) A integral indefinida a seguir foi calculada pelo computador.

$$\int x + \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int x\,dx$$

Resolvendo:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Substituir $x = \text{sen}(u) \rightarrow u = \text{arcsen}(x), \frac{dx}{du} = \cos(u)$:

$$= \int \cos(u)\sqrt{-sen^2(u)+1}\,du$$

Simplificar usando $-sen^2(u) + 1 = cos^2(u)$:

$$\int cos^2(u)du$$

Aplicar a fórmula da redução (com n = 2):

$$\int cos^n(u)du = \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}(u)du + \frac{cos^{n-1}(u)sen(u)}{n}$$

$$= \frac{\cos(u)\,sen(u)}{2} + \frac{1}{2}\int 1du$$

Resolvendo:

$$\int 1du = u$$

Reagrupar e substituir:

$$\frac{\cos(u)\,sen(u)}{2} + \frac{1}{2}\int 1du = \frac{\cos(u)\,sen(u)}{2} + \frac{u}{2} = \frac{\text{arcsen}(u)}{2} + \frac{x\sqrt{-x^2+1}}{2}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{arcsen(x) + x\sqrt{-x^2+1} + x^2}{2}$$

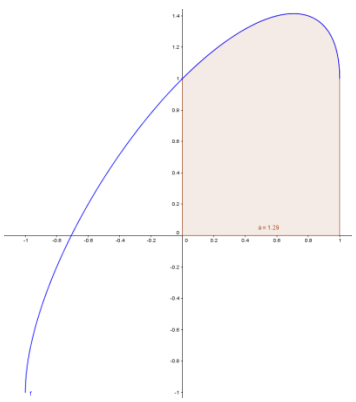
Calculando de 0 a 1 obtém-se a área:

$$A = \int_0^1 x + \sqrt{1-x^2}\,dx$$

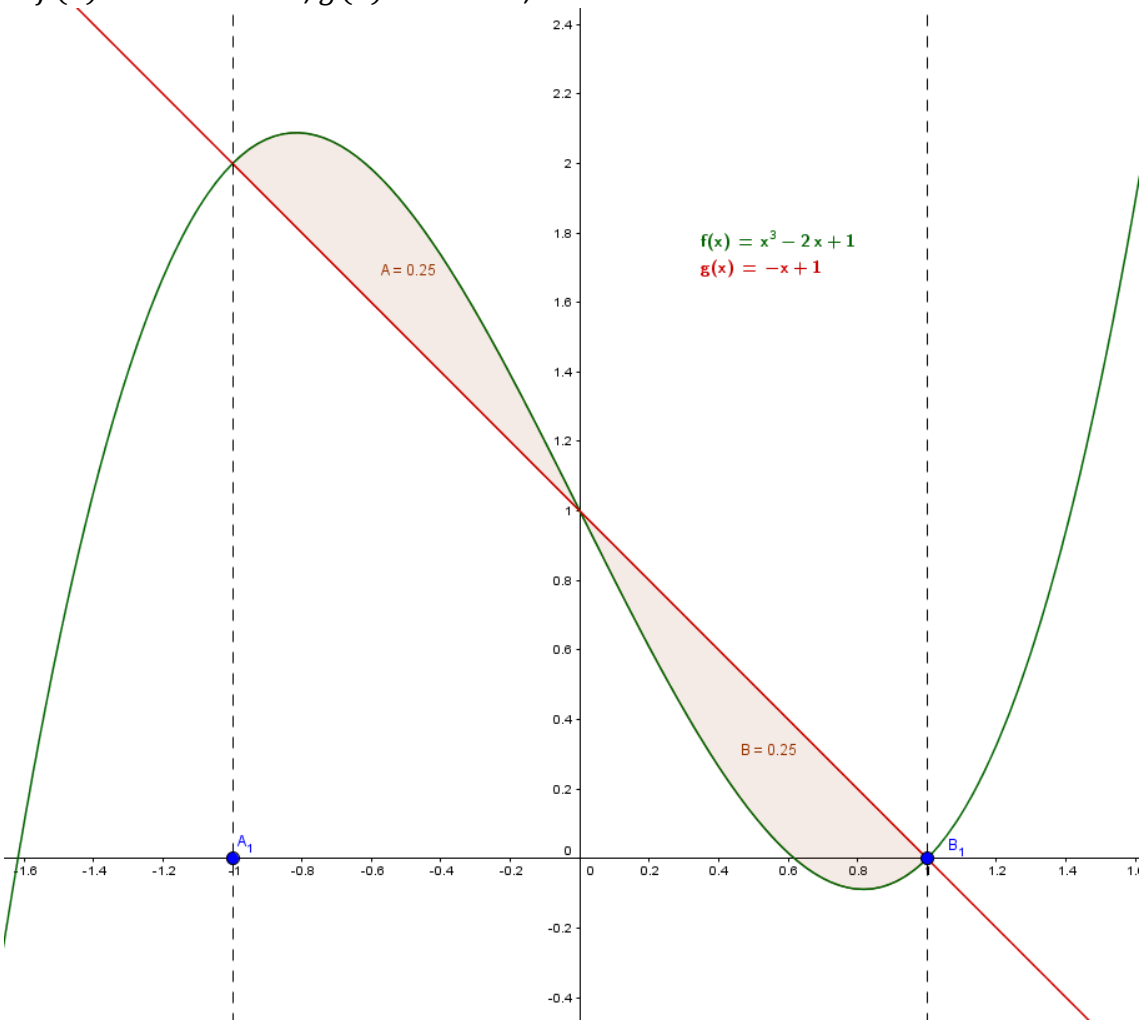
$$A = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}x + \frac{1}{2}arcsen\,x\Big|_0^1$$

$$A = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-1}(1) + \frac{1}{2}arcsen(1)$$

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}$$



7. $f(x) = x^3 - 2x + 1, g(x) = -x + 1, 1 \leq x \leq 1$



$$A = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{1} (g(x) - f(x))\,dx$$

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - 2x + 1 + x - 1)\,dx + \int_{0}^{1} (-x + 1 - x^3 + 2x - 1)\,dx$$

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x)\,dx$$

$$A = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{-x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}$$

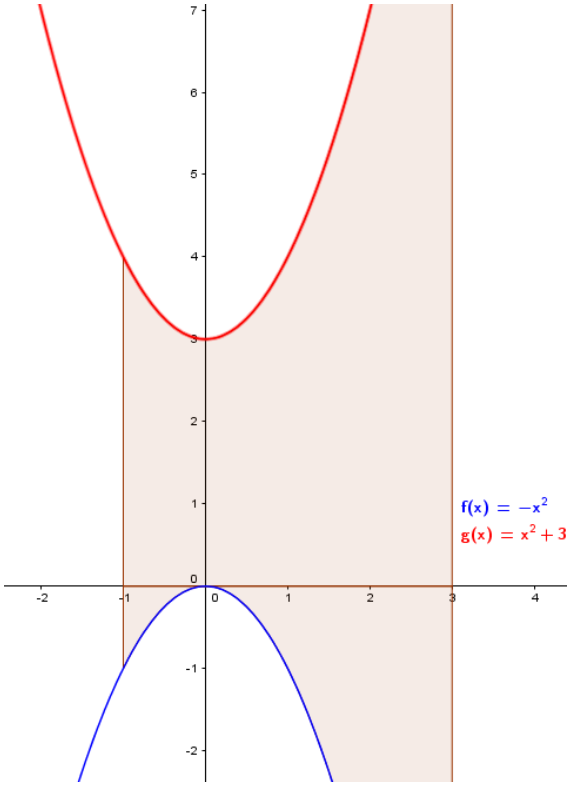
$$A = 0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \frac{-(1)^4}{4} - \frac{(1)^2}{2} - 0$$

$$A = -\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}}$$

8. A = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: -1 ≤ x ≤ 3 e y ≥ f(x)} e B = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: -1 ≤ x ≤ 3 e y ≤ x^2+3}
A∩B = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: -1 ≤ x ≤ 3 e y ≥ f(x) e y ≤ x^2+3}

Seja g(x) = x^2+3. Escolhi uma f arbitrária (que obedece aos requisitos) para propósitos de ilustração:



A área de A∩B será a área entre g(x) e f(x) em [-1, 3]:

$$A_{\text{A}\cap\text{B}} = 23 = \int_{-1}^{3} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$$

É visível que $A_{\text{A}\cap\text{B}}$ é a soma das áreas entre g(x) e o eixo das abscissas e entre f(x) e o mesmo eixo, logo:

$$23 = \int_{-1}^{3} (x^2 + 3)\, dx - \int_{-1}^{3} f(x)\, dx$$

$$23 - \int_{-1}^{3} (x^2 + 3)\, dx = -\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = -23 + \int_{-1}^{3} (x^2 + 3)\, dx$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = -23 + \left(\frac{x^3}{3} + 3x \Big|_{-1}^{3}\right)$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = -23 + \frac{3^3}{3} + 9 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 3\right)$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = -5 + \frac{10}{3}$$

$$\boldsymbol{\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = -\frac{5}{3}}$$