- RESUMÃO -

LIMITES

(Cálculo)

Formulário, Dicas e Macetes para a Prova

Responde Aí

www.respondeai.com.br

PRIMEIRA COISA: Substituir o valor do limite e ver se cai em algum valor. Se sim, perfeito, é essa a resposta; se não, é uma indeterminação.

Propriedades

Para casos **sem indeterminações**:

$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to c}[k.f(x)] = k.\lim_{x\to c}[f(x)], k \in \mathbb{R}$
$\lim_{x\to c}(f(x)).(g(x)) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c}(f(x))}{\lim_{x\to c}(g(x))}$, se $\lim_{x\to c}(g(x)) \neq 0$

Indeterminações e Dicas de Resolução

Problema: se você chegar em **qualquer** um desses valores ao substituir o seu limite.

$$\left(\frac{0}{0}\right); \quad \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right); \quad (0).(\pm\infty); \quad (\infty - \infty); \quad (0^0); \quad (\infty^0); \quad (1^\infty)$$

Solução: mexer na função do limite para achar algum tipo de solução algébrica. Para isso, use nossas dicas de resolução =D

Indeterminação de uma divisão com uma soma ou subtração de raízes quadradas ou cúbicas

- Racionalizar usando

Temos isso	$\sqrt{a(x)} \pm \sqrt{b(x)}$
Multiplicamos em cima e embaixo por	$\sqrt{a(x)} \mp \sqrt{b(x)}$

Temos isso	$\sqrt[3]{a(x)} \pm \sqrt[3]{b(x)}$
Multiplicamos em cima e embaixo por	$\left(\sqrt[3]{a(x)}\right)^2 \mp \sqrt[3]{a(x)b(x)} + \left(\sqrt[3]{b(x)}\right)^2$

Aqui multiplicamos em cima e embaixo pelo termo que usamos na regra.

- Ex: $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}$
- Indeterminação:
  $$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}} = \frac{0}{\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{0}{0}$$
- Solução: $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1})}{(x^2-1)-(2x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1})}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1}}{x} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

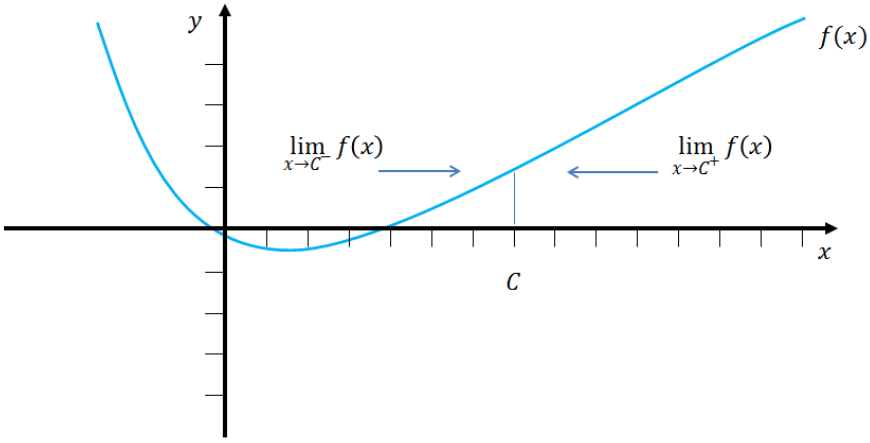
Divisão entre polinômios com $x \to \pm\infty$ ➢ Dividir todos os termos pelo x de maior grau ➢ Todos os termos com x no denominador vão para 0	➢ Ex: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^2+3x+7}$ ➢ Solução: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^2+3x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}$ $= \frac{1-0+0}{1+0+0} = 1$
Divisão de polinômios com $x \to C$, tendo nos dois polinômios C como raiz ➢ Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ➢ Dividir ambos os polinômios por $x - c$ para eliminar o termo comum ➢ É uma boa dar uma relembrada em divisão polinomial, como o método de Briot-Ruffini	➢ Ex: $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}$ ➢ Solução: $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to-1} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)}$ $= \lim_{x\to-1} \frac{x-3}{x+2} = \frac{-1-3}{-1+2} = -4$
Substituição de termos repetidos ➢ Quando temos uma expressão aparecendo em várias partes ➢ Chamamos essa expressão de outra variável, não esquecer de mudar o limite também	➢ Ex: $\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x^2-1}+\cos(x^2-1)}{2+(x^2-1)}$ ➢ Solução: $u = x^2 - 1;\ x \to -1 \Rightarrow u \to 0$ $\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x^2-1}+\cos(x^2-1)}{2+(x^2-1)}$ $= \lim_{u\to0} \frac{\sqrt{u}+\cos(u)}{2+u} = \frac{0+1}{2+0} = \frac{1}{2}$

É sempre bom lembrar: podem cair misturas desses casos citados, mas os processos são iguais.

Limites Laterais

Se ele pedir para ver se um limite existe, os limites laterais podem entrar em cena. Saca só como eles são:

Limite lateral esquerdo: $\lim_{x\to C^-} f(x)$
Limite lateral direito: $\lim_{x\to C^+} f(x)$

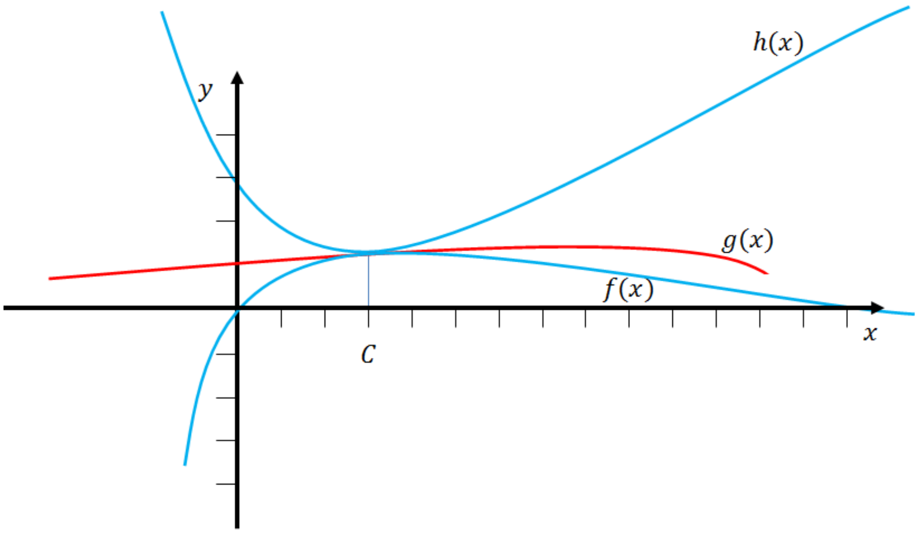


Como definir se um limite em $x = C$ existe? (Se $C \neq \pm\infty$)

$$\lim_{x\to C^-} f(x) = \lim_{x\to C^+} f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{x\to C} f(x) \text{ existe e } \lim_{x\to C} f(x) = \lim_{x\to C^-} f(x) = \lim_{x\to C^+} f(x)$$

Teorema do Confronto

Um pouco de filosofia pra você, amigo...
3 funções: uma acima da outra. Se a de cima e a de baixo convergem em um ponto, a do meio tem que convergir para esse ponto!



$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \neq C \\ \lim_{x\to C} f(x) = \lim_{x\to C} h(x) = L \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to C} g(x) = L$$

Bizu: isso geralmente aparece com funções $\operatorname{sen}(x)$ ou $\cos(x)$. Então, fique atento!

Exemplo: $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

O seno varia entre -1 e $+1$: $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Logo, nossa função varia entre:
$-x^2 \leq \mathrm{x}^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$.
O limite de $-x^2$ quando $x \to 0$ é 0 e o limite de x^2 também é 0. Como $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ está no meio, seu limite também é 0: $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Limite Fundamental

Esse é pra saber...
Deixe claro na prova que você o identificou como o limite fundamental e pode usar seu resultado direto!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Continuidade

O **limite** da função é igual ao **valor** da função naquele ponto:

$$\lim_{x \to C^-} f(x) = \lim_{x \to C^+} f(x) = f(C)$$

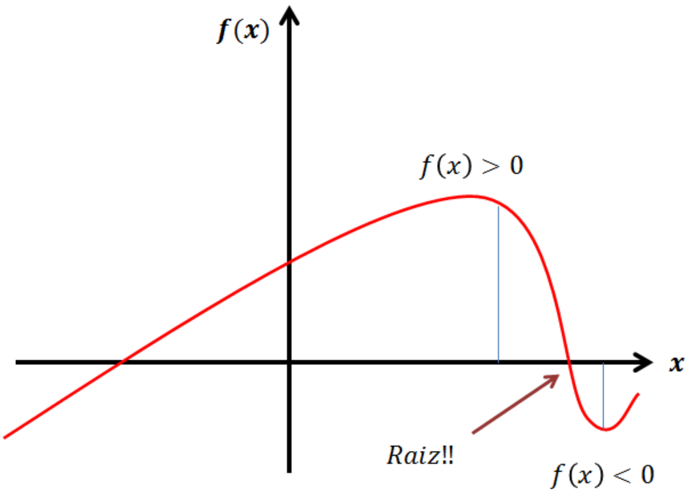
O esquema é o seguinte: se a questão na tua prova dá uma função contínua, para calcular o limite, é só substituir o valor na função!

Teorema do Valor Intermediário (T.V.I.)

O TVI é um pouco mais complexo do que isso, mas eu vou te contar a parte importante:

Se uma função contínua troca de sinal num certo intervalo, ela tem ao menos uma raiz real no mesmo intervalo.

Pra que serve isso? Para mostrar na questão da sua prova que a função tem pelo menos uma raiz ali naquele intervalo! Visualizou?



Muita coisa para estudar em pouco tempo?

No Responde Aí, você pode se aprofundar na matéria com explicações simples e muito didáticas. Além disso, contamos com milhares de exercícios resolvidos passo a passo para você praticar bastante e tirar todas as suas dúvidas.

Acesse já: www.respondeai.com.br e junte-se a outros milhares de alunos!

Excelentes notas nas provas, galera :)