1. (a) **(1,0)** Seja $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x^2})$. Calcule $f'(x)$ nos pontos $x \in \mathbb{R}$ nos quais ela existe.

(b) **(1,0)** Calcule $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x^{\frac{1}{\ln x}}$

(a) $f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} \quad \forall x \neq 0$

Para $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{x^2} - 1}{x} \cdot \frac{(\cos\sqrt[3]{x^2}+1)}{(\cos\sqrt[3]{x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2\sqrt[3]{x^2}}{x(\cos\sqrt[3]{x^2}+1)} = \lim_{x\to 0} -\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2}}{x^{2/3}}\right)^2 \cdot \frac{x^{1/3}}{\underbrace{\cos\sqrt[3]{x^2}+1}_{\to 1}}$$

$\to 1$ (*) $\quad x^{1/3} \to 0$

$= -1 \cdot 0 = 0$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2}}{x^{2/3}} \underset{\substack{u = x^{2/3} \\ x\to 0 \Rightarrow u \to 0}}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$ ↳ limite fundamental

(b) $\operatorname{tg} x^{1/\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \ln \operatorname{tg} x}$

Como a função $f(x) = e^x$ é contínua, se $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln x} = L$ então $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln x}} = e^L$.

Vamos então calcular L.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln \operatorname{tg} x}}{\underset{\to -\infty}{\ln x}} \underset{L'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$\to 1$ (limite fundamental) $\quad \cos x \to 1$

Logo $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x^{1/\ln x} = e^1 = e$.

2. **(2,0)** Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$, determinando o seu domínio, os intervalos de crescimento e decrescimento, a concavidade e calculando todos os limites necessários.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-4}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-4}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{\overset{\to 0}{x^2-4}}{\underset{\to 0,\ >0}{(x-1)^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \overset{\to 0}{1/x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \underset{\to 0}{\frac{2}{x}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}\right)} = 1$$

A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical e a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)^{\cancel{2}} - (x^2-4) \cdot 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2(4-x)}{(x-1)^3}$$

f': $- - - -$ (1) $+ + + +$ (4) $- - - -$

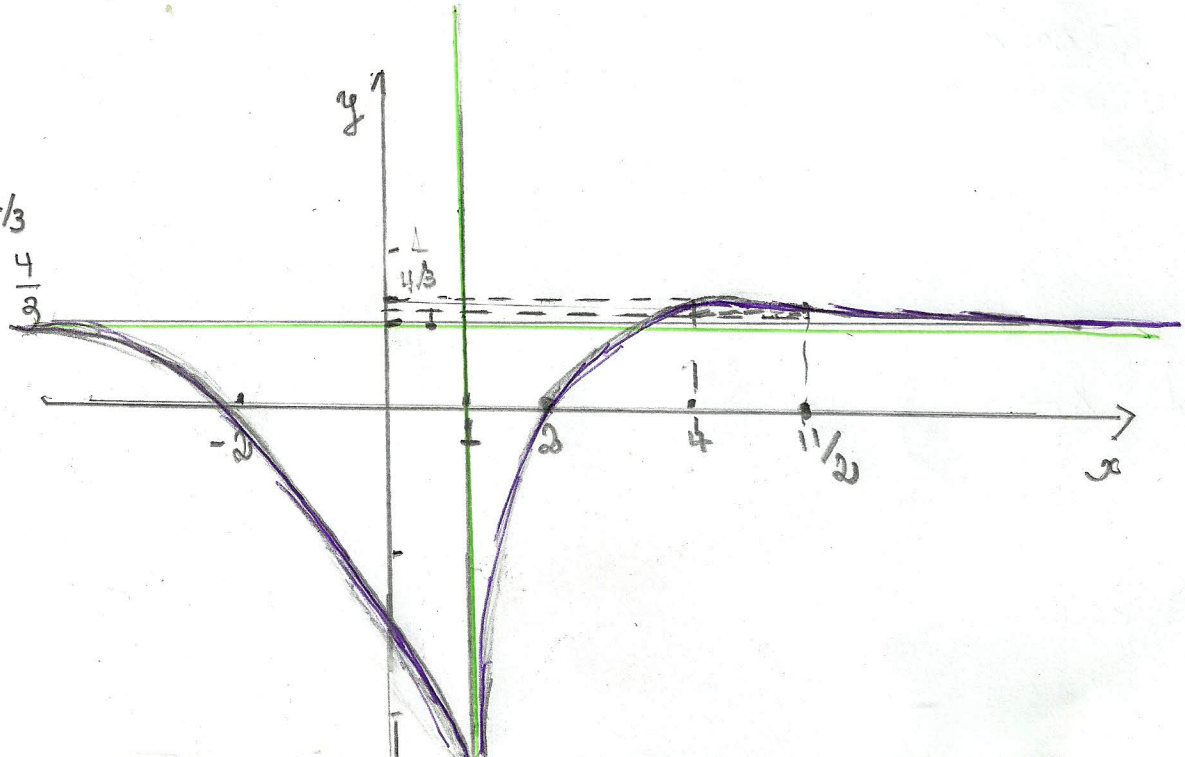
f: $\searrow$ (1) $\nearrow$ (4) $\searrow$

$$f''(x) = \frac{2\left[(-1)(x-1)^3 - (4-x)\,3\,(x-1)^2\right]}{(x-1)^6} = \frac{2(2x-11)}{(x-1)^4}$$

f'': $- - -$ (1) $- - -$ ($11/2$) $+ + +$

f: $\frown$ (1) $\frown$ ($11/2$) $\smile$

x	$f(x)$
± 2	0
4	$12/9 = 4/3$
$11/2$	$95/27 < \frac{4}{3}$
0	-4



3. **(2,0)** Calcule a área da região limitada compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = x^2(x-1)$.

$f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$

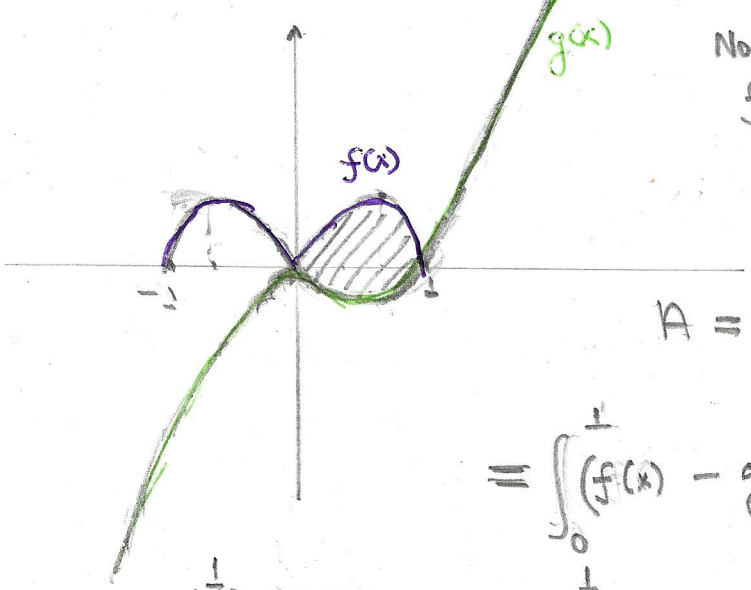
$g(x) = x^2(x-1)$

$f(x) = g(x) \iff x^2\sqrt{1-x^2} = x^2(x-1)$

$\iff x = 0$ ou $\sqrt{1-x^2} = x-1$

$\sqrt{1-x^2} = x-1 \iff 1-x^2 = x^2-2x+1 \iff 2x^2-2x=0$

$\iff x = x = 0$ ou $x = 1$



No intervalo $[0,1]$ temos que $f(x) \geq 0$ e $g(x) \leq 0$.

A área ~~A é~~

$$A = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx$$

$$= \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx$$

$$\int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \cos^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{4}\,d\theta$$

$x = \operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$

$dx = \cos\theta\, d\theta$

$x = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$x = 1 \Rightarrow \theta = \pi/2$

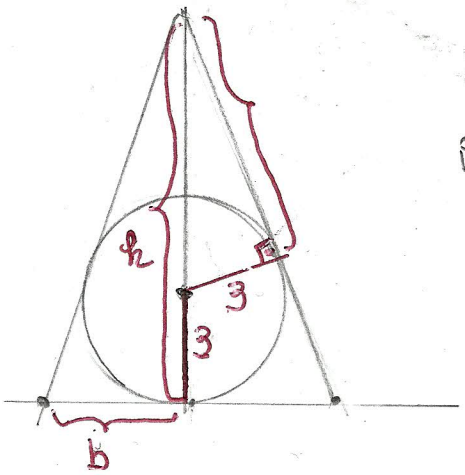
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{16}\pi - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4(\pi/2)$$

$$= \frac{\pi}{16} \;//$$

Logo $A = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{1}{12}$

4. **(2,0)** Dentre todos os triângulos isósceles circunscritos a um círculo de raio 3 existe um cuja área é máxima? E mínima? Se sim, qual é essa área? **Justifique.**



$A = b\,h$

Por semelhança de triângulos temos que $\dfrac{b}{h} = \dfrac{3}{\sqrt{(h-3)^2-3^2}}$

Assim

$$b = \frac{3h}{\sqrt{h^2-6h}}$$

A área em função de h é

$$A(h) = \frac{3h^2}{\sqrt{h^2-6h}}$$

. o problema faz sentido se $h^2-6h>0$, $h>0$, ou seja se $h>6$

Temos então que estudar a função

$$A(h) = \frac{3h^2}{\sqrt{h^2-6h}}$$ no intervalo $]6,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 6^+} A(h) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{h\to+\infty} A(h) = +\infty$

$$A'(h) = \frac{6h\left(\sqrt{h^2-6h}\right) - 3h^2\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(h^2-6h)^{-1/2}\cdot(\cancel{2}h-\cancel{6}^{\,3})}{h^2-6h}$$

$$= \frac{6h(h^2-6h)-3h^2(h-3)}{(h^2-6h)^{3/2}} = \frac{3h^3-27h^2}{(h^2-6h)^{3/2}}$$

$$= \frac{3h^2}{(h^2-6h)^{3/2}}\cdot(h-9)$$

	$]6$		9	
$A'(h)$		$-$ $-$ $-$		$+$ $+$ $+$ $+$
$A(h)$		$\searrow$		$\nearrow$

A função $A(h)$ não tem máximo em $]6,+\infty[$.

A área é mínima no ponto $h=9$.

$\boxed{\text{Área MÍNIMA: } 81/\sqrt{3}}$

Não tem área máxima pois se $h\to 6^+$ ou $h\to+\infty$, tem-se que $A(h)\to+\infty$.

Se existisse o máximo de $A(h)$ em $]6,+\infty[$, existiria outro ponto crítico e ele é ponto de máximo local em $]6,+\infty[$. Só que existe um único ponto crítico.

5. Calcule as seguintes integrais:

(a) **(1,0)** $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$,

(b) **(1,0)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{4x}}\,\mathrm{d}x$.

(a) por partes

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

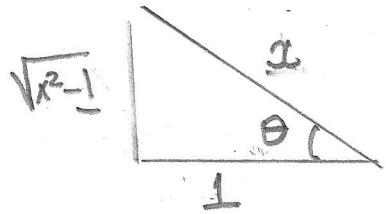
$dv = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \Rightarrow v = \sqrt{x^2-1}$

$$\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = (\ln x)\sqrt{x^2-1} - \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg}\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta}{\sec\theta} =$$

$x = \sec\theta$, $\theta \in [0, \pi/2[\cup [\pi, 3\pi/2[$

$dx = \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$



$\sqrt{x^2-1} = |\operatorname{tg}\theta| = \operatorname{tg}\theta$

$$= \int \operatorname{tg}^2\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\,d\theta = \operatorname{tg}\theta - \theta + C$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arc\,sec}(x) + C.$$

Logo $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln x\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} + \operatorname{arc\,sec}(x) + C$

(b) $y = e^{2x}$ $\quad dy = 2e^{2x}\,dx$

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^{4x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(y) + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(e^{2x}) + C$$