

Gabarito da Prova de Recuperação
MAT-2453 - Tipo A

27 de Julho de 2011

Questão 1. Seja

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + x^4)^{3x}, & \text{se } x < 0; \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) (1,0) Verifique que f é contínua no ponto $x_0 = 0$.

(b) (1,0) A função f é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique sua resposta.

(a) Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 = f(0);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x^4)^{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{3x \ln(x^2 + x^4)}.$$

Seja $g(x) = 3x \ln(x^2 + x^4)$ com $x < 0$. Então $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\frac{1}{3x}}$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x^2 + x^4) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$ (pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x^4) = 0$ e $x^2 + x^4 > 0$ para $x < 0$) e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3x} = -\infty$ concluímos que para calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ temos o caso $\frac{-\infty}{-\infty}$, e portanto podemos usar a Regra de L'Hospital.

$$\text{De } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\ln(x^2 + x^4))'}{\left(\frac{1}{3x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{(2x+4x^3)}{x^2+x^4}}{\frac{-1}{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3x(2+4x^2)}{1+x^2} = 0 \text{ temos, por L'Hospital,}$$

que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$. Logo $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{g(x)} = e^0 = 1$ (pois a função exponencial é contínua). Portanto $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, e assim f é contínua em $x_0 = 0$.

(b) Iremos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, ou seja $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{3x \ln(x^2 + x^4)} - 1}{x}$.

Sejam $h(x) = e^{3x \ln(x^2 + x^4)}$ e $l(x) = x$, para $x < 0$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} (h(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) - 1) = f(0) - 1 = 0$ (pois f é contínua em $x_0 = 0$) e $\lim_{x \rightarrow 0^-} l(x) = 0$, podemos usar a Regra de L'Hospital para calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Note que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(h(x) - 1)'}{l'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \left(3 \ln(x^2 + x^4) + \frac{3x(2x + 4x^3)}{x^2 + x^4} \right) =$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3h(x) \ln(x^2 + x^4) + \frac{h(x)3(2+4x^2)}{1+x^2} \right) = -\infty$ (pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x^2 + x^4) = -\infty$ (como justificado em (a)),
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3(2+4x^2)}{1+x^2} = 6$). Usando a Regra de L'Hospital concluimos
que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(h(x) - 1)'}{l'(x)} = -\infty.$$

Portanto f não é derivável em $x_0 = 0$.

Questão 2. Seja

$$f(x) = (x + 6)e^{1/x}$$

- (a) (0,5) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento de f .
- (b) (0,5) Calcule os limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- (c) (1,0) Determine todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções reais.

(a) Notemos que o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e que

$$f'(x) = e^{1/x} + (x + 6)e^{1/x} \left(\frac{-1}{x^2} \right) = e^{1/x} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x^2} \right).$$

Como a função exponencial é estritamente maior que 0 e $x^2 > 0$ para $x \neq 0$ temos que o sinal de f' coincide com o sinal de $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$. Portanto temos que

$$f'(x) > 0 \text{ para } x < -2;$$

$$f'(x) < 0 \text{ para } -2 < x < 0;$$

$$f'(x) < 0 \text{ para } 0 < x < 3;$$

$$f'(x) > 0 \text{ para } x > 3.$$

Portanto, usando que f é contínua, temos que

$$f \text{ é estritamente crescente em }]-\infty, -2];$$

$$f \text{ é estritamente decrescente em } [-2, 0[;$$

$$f \text{ é estritamente decrescente em }]0, 3];$$

$$f \text{ é estritamente crescente em } [3, +\infty[.$$

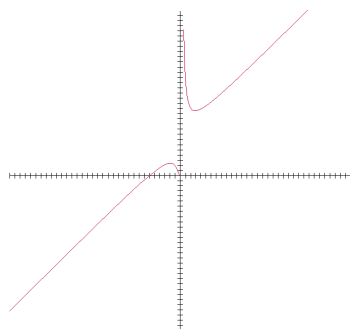
(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+6) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$ visto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e exponencial é uma função contínua;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, pois $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+6) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$ visto que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ e exponencial é uma função contínua;

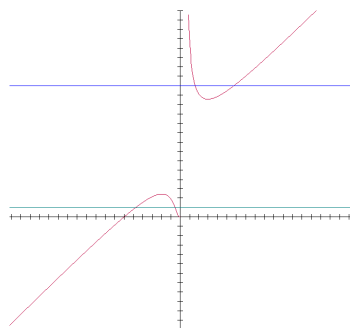
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+6) = 6$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$ visto que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+6) = 6$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$ visto que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

(c) A partir dos intervalos de crescimento e de decrescimento de f , utilizando os limites calculados em (b) e sabendo que f é derivável em todos os pontos de seu domínio (e portanto o seu gráfico não apresenta “bicos”), podemos afirmar que o gráfico de f é da seguinte forma:



A partir do gráfico acima podemos observar que ao passarmos retas paralelas ao eixo Ox , como mostra a figura abaixo,



temos que a reta $y = k$ intercepta o gráfico de f duas vezes se $0 < k < f(-2) = 4e^{-1/2}$ ou se $k > f(3) = 9e^{1/3}$. Portanto a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas raízes reais se, e somente se $0 < k < 4e^{-1/2}$ ou se $k > 9e^{1/3}$.

Questão 3. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_4^{x^2} x \cos(t^2 - 16) dt.$$

(a) (1,0) Calcule $F'(x)$.

(b) (1,0) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de F em torno de $x_0 = 2$.

(a) Seja $G(x) = \int_4^{x^2} \cos(t^2 - 16) dt$. Então $F(x) = x G(x)$, para $x \in \mathbb{R}$.

Defina a função $A(u) = \int_4^u \cos(t^2 - 16) dt$, para $u \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $G(x) = A(x^2)$, para $x \in \mathbb{R}$.

Como a função $l(t) = \cos(t^2 - 16)$ é contínua em $\mathbb{R}$ temos que a função A é derivável em $\mathbb{R}$ e $A'(u) = \cos(u^2 - 16)$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Portanto G é derivável em $\mathbb{R}$, e temos

$$\begin{aligned} F'(x) &= G(x) + x G'(x) = A(x^2) + x A'(x^2) 2x = A(x^2) + 2x^2 \cos(x^4 - 16) \\ &= 2x^2 \cos(x^4 - 16) + \int_4^{x^2} \cos(t^2 - 16) dt. \end{aligned}$$

(b) De $F'(x) = A(x^2) + 2x^2 \cos(x^4 - 16)$, temos que

$$F''(x) = A'(x^2) 2x + 4x \cos(x^4 - 16) - 2x^2 \sin(x^4 - 16) 4x^3,$$

e portanto

$$F''(x) = 2x \cos(x^4 - 16) + 4x \cos(x^4 - 16) - 8x^5 \sin(x^4 - 16).$$

O polinômio de Taylor pedido é:

$$P(x) = F(2) + F'(2)(x - 2) + \frac{F''(2)}{2}(x - 2)^2.$$

Utilizando as derivadas acima e que $A(4) = 0$ temos que $F(2) = 2G(2) = 2A(4) = 0$, $F'(2) = A(4) + 8 \cos(0) = 8$ e $F''(2) = 4 \cos(0) + 8 \cos(0) - 256 \sin(0) = 12$. Logo

$$P(x) = 8(x - 2) + 6(x - 2)^2.$$

Questão 4. Calcule as seguintes integrais:

A

(a) $\int_0^1 \frac{\cos(\ln(5x))}{x} dx$

(b) $\int_0^1 (x^2 + 2x) e^{4x} dx$

(a) Fazendo a substituição $u = \ln(5x)$ obtemos
 $du = \frac{1}{5x} \cdot 5 dx = \frac{1}{x} dx$

Portanto,
$$\int \frac{\cos(\ln(5x))}{x} dx = \int \cos u du = \sin u + k =$$

$$= \sin(\ln(5x)) + k$$

(b) Usando o método de integração por partes, com
 $u = x^2 + 2x$ e $dv = e^{4x} dx$, teremos

$du = (2x + 2) dx$ e $v = \frac{e^{4x}}{4}$

Logo,
$$\int (x^2 + 2x) e^{4x} dx = (x^2 + 2x) \frac{e^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4} (2x + 2) dx$$

$$= (x^2 + 2x) \frac{e^{4x}}{4} - \frac{1}{2} \int (x + 1) e^{4x} dx$$

Para esta última integral, usamos novamente a integração por partes com $u = x + 1$ e $dv = e^{4x} dx$, obtendo

$$\int (x + 1) e^{4x} dx = (x + 1) \frac{e^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4} \cdot 1 dx$$

$$= (x + 1) \frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + k$$

Portanto,

$$\int_0^1 (x^2 + 2x) e^{4x} dx = \left[(x^2 + 2x) \frac{e^{4x}}{4} - \frac{1}{2} \left((x + 1) \frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} \right) \right] \Big|_0^1$$

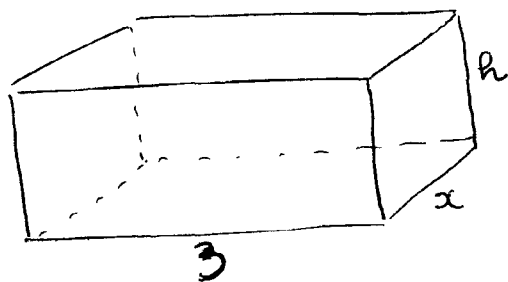
$$= \frac{3}{4} e^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot e^4 - \frac{e^4}{16} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right)$$

$$= \frac{17}{32} e^4 + \frac{3}{32}$$

Questão 5. Um fabricante necessita comprar caixas retangulares com tampa que tenham um volume fixado V e 3 metros de comprimento.

(a) (0,5) Se x representa a largura da caixa a ser construída, determine a quantidade de material gasto na fabricação da caixa em função de x .

(b) (1,5) Para gastar a menor quantidade possível de material na fabricação dessas caixas, quanto devem medir a largura e a altura? Justifique cuidadosamente sua resposta.



$$V = 3xh \Leftrightarrow h = \frac{V}{3x} \quad (x > 0)$$

(V fixado, x e h variam)

(a) A quantidade de material gasto é dada pela área da superfície da caixa:

$$A(x) = 2[3x + xh + 3h] = 6x + 2(x+3) \frac{V}{3x}$$

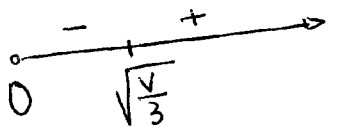
$$\Leftrightarrow A(x) = 6x + \frac{2V}{3} \left(\frac{x+3}{x} \right), \quad x > 0$$

(b) Como A é derivável para todo $x > 0$, os pontos críticos são as soluções da equação $A'(x) = 0$.

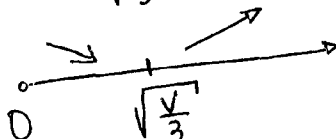
$$A'(x) = 6 + \frac{2V}{3} \left[\frac{x - (x+3)}{x^2} \right] = 6 - \frac{2V}{x^2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 = 2V \Leftrightarrow 3x^2 = V \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{V}{3}} \quad (x > 0)$$

Sinais de A' :



A :



A função A é decrescente em $]0, \sqrt{\frac{V}{3}}[$ e crescente

Logo, $x_0 = \sqrt{\frac{V}{3}}$ é ponto de mínimo (global) de A .
A largura da caixa ideal é $x_0 = \sqrt{\frac{V}{3}}$ e a altura é $h_0 = \frac{V}{3\sqrt{\frac{V}{3}}} = \sqrt{\frac{V}{3}}$.

Gabarito da Prova de Recuperação
MAT-2453 - Tipo B

27 de Julho de 2011

Questão 1. Seja

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + x^4)^{2x}, & \text{se } x < 0; \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) (1,0) Verifique que f é contínua no ponto $x_0 = 0$.

(b) (1,0) A função f é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique sua resposta.

(a) Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 = f(0);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x^4)^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x \ln(x^2 + x^4)}.$$

Seja $g(x) = 2x \ln(x^2 + x^4)$ com $x < 0$. Então $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\frac{1}{2x}}$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x^2 + x^4) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$ (pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x^4) = 0$ e $x^2 + x^4 > 0$ para $x < 0$) e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = -\infty$ concluímos que para calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ temos o caso $\frac{-\infty}{-\infty}$, e portanto podemos usar a Regra de L'Hospital.

$$\text{De } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\ln(x^2 + x^4))'}{\left(\frac{1}{2x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{(2x+4x^3)}{x^2+x^4}}{\frac{-1}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x(2+4x^2)}{1+x^2} = 0 \text{ temos, por L'Hospital,}$$

que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$. Logo $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{g(x)} = e^0 = 1$ (pois a função exponencial é contínua). Portanto $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, e assim f é contínua em $x_0 = 0$.

(b) Iremos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, ou seja $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x \ln(x^2 + x^4)} - 1}{x}$.

Sejam $h(x) = e^{2x \ln(x^2 + x^4)}$ e $l(x) = x$, para $x < 0$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} (h(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) - 1) = f(0) - 1 = 0$ (pois f é contínua em $x_0 = 0$) e $\lim_{x \rightarrow 0^-} l(x) = 0$, podemos usar a Regra de L'Hospital para calcular $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Note que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(h(x) - 1)'}{l'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \left(2\ln(x^2 + x^4) + \frac{2x(2x + 4x^3)}{x^2 + x^4} \right) =$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2h(x)\ln(x^2 + x^4) + \frac{h(x)2(2+4x^2)}{1+x^2} \right) = -\infty$ (pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x^2 + x^4) = -\infty$ (como justificado em (a)),
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(2+4x^2)}{1+x^2} = 4$). Usando a Regra de L'Hospital concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(h(x) - 1)'}{l'(x)} = -\infty.$$

Portanto f não é derivável em $x_0 = 0$.

Questão 2. Seja

$$f(x) = (x + 2)e^{1/x}$$

- (a) (0,5) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento de f .
- (b) (0,5) Calcule os limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- (c) (1,0) Determine todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções reais.

(a) Notemos que o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e que

$$f'(x) = e^{1/x} + (x + 2)e^{1/x} \left(\frac{-1}{x^2} \right) = e^{1/x} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right).$$

Como a função exponencial é estritamente maior que 0 e $x^2 > 0$ para $x \neq 0$ temos que o sinal de f' coincide com o sinal de $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Portanto temos que

$$f'(x) > 0 \text{ para } x < -1;$$

$$f'(x) < 0 \text{ para } -1 < x < 0;$$

$$f'(x) < 0 \text{ para } 0 < x < 2;$$

$$f'(x) > 0 \text{ para } x > 2.$$

Portanto, usando que f é contínua, temos que

$$f \text{ é estritamente crescente em }]-\infty, -1];$$

$$f \text{ é estritamente decrescente em } [-1, 0[;$$

$$f \text{ é estritamente decrescente em }]0, 2];$$

$$f \text{ é estritamente crescente em } [2, +\infty[.$$

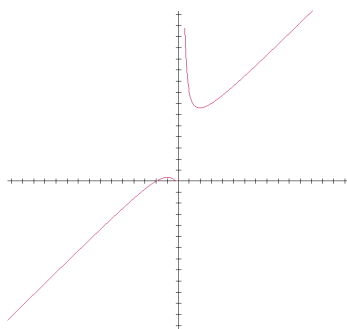
(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$ visto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e exponencial é uma função contínua;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, pois $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$ visto que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ e exponencial é uma função contínua;

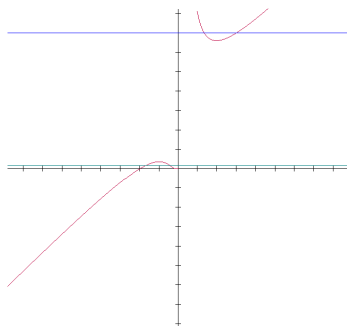
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$ visto que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$ visto que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

(c) A partir dos intervalos de crescimento e de decrescimento de f , utilizando os limites calculados em (b) e sabendo que f é derivável em todos os pontos de seu domínio (e portanto o seu gráfico não apresenta “bicos”), podemos afirmar que o gráfico de f é da seguinte forma:



A partir do gráfico acima podemos observar que ao passarmos retas paralelas ao eixo Ox , como mostra a figura abaixo,



temos que a reta $y = k$ intercepta o gráfico de f duas vezes se $0 < k < f(-1) = e^{-1}$ ou se $k > f(2) = 4e^{1/2}$. Portanto a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas raízes reais se, e somente se $0 < k < e^{-1}$ ou se $k > 4e^{1/2}$.

Questão 3. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_9^{x^2} x \cos(t^2 - 81) dt.$$

(a) (1,0) Calcule $F'(x)$.

(b) (1,0) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de F em torno de $x_0 = 3$.

(a) Seja $G(x) = \int_9^{x^2} \cos(t^2 - 81) dt$. Então $F(x) = x G(x)$, para $x \in \mathbb{R}$.

Defina a função $A(u) = \int_9^u \cos(t^2 - 81) dt$, para $u \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $G(x) = A(x^2)$, para $x \in \mathbb{R}$.

Como a função $l(t) = \cos(t^2 - 81)$ é contínua em $\mathbb{R}$ temos que a função A é derivável em $\mathbb{R}$ e $A'(u) = \cos(u^2 - 81)$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Portanto G é derivável em $\mathbb{R}$, e temos

$$\begin{aligned} F'(x) &= G(x) + x G'(x) = A(x^2) + x A'(x^2) 2x = A(x^2) + 2x^2 \cos(x^4 - 81) \\ &= 2x^2 \cos(x^4 - 81) + \int_9^{x^2} \cos(t^2 - 81) dt. \end{aligned}$$

(b) De $F'(x) = A(x^2) + 2x^2 \cos(x^4 - 81)$, temos que

$$F''(x) = A'(x^2) 2x + 4x \cos(x^4 - 81) - 2x^2 \sin(x^4 - 81) 4x^3,$$

e portanto

$$F''(x) = 2x \cos(x^4 - 81) + 4x \cos(x^4 - 81) - 8x^5 \sin(x^4 - 81).$$

O polinômio de Taylor pedido é:

$$P(x) = F(3) + F'(3)(x - 3) + \frac{F''(3)}{2}(x - 3)^2.$$

Utilizando as derivadas acima e que $A(9) = 0$ temos que $F(3) = 3G(3) = 3A(9) = 0$, $F'(3) = A(9) + 18 \cos(0) = 18$ e $F''(3) = 6 \cos(0) + 12 \cos(0) - 1944 \sin(0) = 18$. Logo

$$P(x) = 18(x - 3) + 9(x - 3)^2.$$

Questão 4. Calcule as seguintes integrais:

$$(a)(1,0) \int \frac{\cos(\ln(7x))}{x} dx$$

$$(b)(1,0) \int_0^1 (x^2 + 3x) e^{6x} dx$$

Solução:

(a) Fazendo $u = \ln(7x)$ iremos obter $du = \frac{1}{7x} \cdot 7dx = \frac{1}{x} dx$. Portanto

$$\int \frac{\cos(\ln(7x))}{x} dx = \int \cos u du = \sin u + k = \sin(\ln(7x)) + k$$

(b) Usando o método de integração por partes com $u = x^2 + 3x$ e $dv = e^{6x} dx$, teremos $du = (2x + 3)dx$ e $v = \frac{e^{6x}}{6}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x) e^{6x} dx &= (x^2 + 3x) \frac{e^{6x}}{6} - \int \frac{e^{6x}}{6} (2x + 3) dx \\ &= (x^2 + 3x) \frac{e^{6x}}{6} - \frac{1}{6} \int (2x + 3) e^{6x} dx \end{aligned}$$

Para a última integral, usamos novamente o método de integração por partes com $u = 2x + 3$ e $dv = e^{6x} dx$, obtendo

$$\int (2x + 3) e^{6x} dx = (2x + 3) \frac{e^{6x}}{6} - \int \frac{e^{6x}}{6} \cdot 2 dx = (2x + 3) \frac{e^{6x}}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{6x}}{6} + k$$

Portanto,

$$\int (x^2 + 3x) e^{6x} dx = (x^2 + 3x) \frac{e^{6x}}{6} - \frac{1}{6} \left[(2x + 3) \frac{e^{6x}}{6} - \frac{1}{18} e^{6x} \right] = \frac{9x^2 + 24x - 4}{54} e^{6x} + k$$

e

$$\int_0^1 (x^2 + 3x) e^{6x} dx = \frac{29e^6 - 4}{54}$$

Questão 5. Um fabricante necessita comprar caixas retangulares com tampa que tenham um volume fixado V e 2 metros de comprimento.

- (a) (0,5) Se x representa a largura da caixa a ser construída, determine a quantidade de material gasto na fabricação da caixa em função de x .
- (b) (1,5) Para gastar a menor quantidade possível de material na fabricação dessas caixas, quanto devem medir a largura e a altura? Justifique cuidadosamente sua resposta.

Solução:

O volume da caixa é dado por $V = 2xh$, sendo h a altura da caixa. Portanto, $h = \frac{V}{2x}$ para $(x > 0)$. Note que V é constante enquanto que x e h variam.

(a) A quantidade de material gasto é dada pela área da superfície da caixa $A(x) = 2(2x + xh + 2h) = 4x + 2(x + 2)\frac{V}{2x}$, ou seja,

$$A(x) = 4x + V \frac{2 + x}{x}, \quad x > 0$$

(b) Como A é derivável para todo $x > 0$, os pontos críticos da função A são as soluções da equação $A'(x) = 0$.

$$A'(x) = 4 + V \frac{x - 2 - x}{x^2} = 4 - \frac{2V}{x^2} \text{ e } A'(x) = 0 \iff 4x^2 = 2V \iff x^2 = \frac{V}{2}.$$

Como $x > 0$, temos $x = \sqrt{\frac{V}{2}}$.

Também vemos que $A'(x) < 0$ para $0 < x < \sqrt{\frac{V}{2}}$ e $A'(x) > 0$ para $x > \sqrt{\frac{V}{2}}$. Portanto, A é decrescente no intervalo $]0, \sqrt{\frac{V}{2}}[$, crescente no intervalo $]\sqrt{\frac{V}{2}}, +\infty[$ e $x_0 = \sqrt{\frac{V}{2}}$ é ponto de mínimo absoluto de A .

A largura da caixa que minimiza os gastos com material é $x_0 = \sqrt{\frac{V}{2}}$ e a altura é $h_0 = \frac{V}{2x_0} = \sqrt{\frac{V}{2}}$