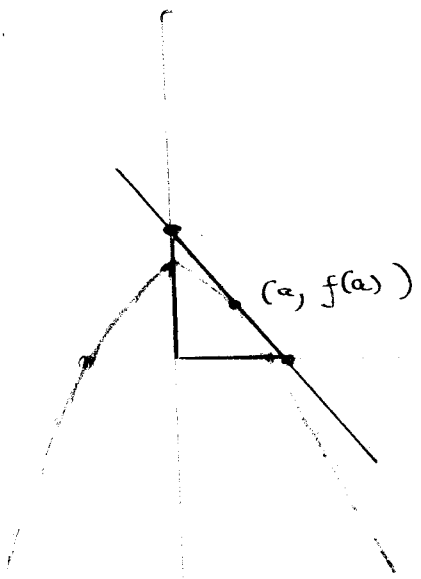
2-) (2,0 pontos) Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 1 - x^2$ que forma com os eixos coordenados, no primeiro quadrante, um triângulo de área mínima?



Equação da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$:

$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(a) = -2a$

$$\boxed{y - (1-a^2) = -2a(x-a)}$$

Queremos o triângulo no primeiro quadrante. Assim

$0 < a < 1$

A reta tangente em $(a, f(a))$ intersecta o eixo x em $\left(\frac{a^2+1}{2a}, 0\right)$ e intersecta o eixo y em $(0, 1+a^2)$. Logo a área do triângulo é $A(a) = \frac{1}{2}\frac{(a^2+1)^2}{2a} = \frac{1}{4}\frac{(a^2+1)^2}{a}$

Queremos então o mínimo de $A(a)$ com $a \in]0,1[$.

$$A'(a) = \frac{1}{4}\left[\frac{2(a^2+1)\cdot 2a\,a - (a^2+1)^2}{a^2}\right] = \frac{1}{4a^2}(a^2+1)\left[4a^2 - a^2 - 1\right]$$

$$= \frac{a^2+1}{4a^2}(3a^2-1).$$ A única raiz de $A'(a)$ em $]0,1[$ é $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e o sinal de $A'(a)$ nesse intervalo é

A': 0 — — — $\frac{1}{\sqrt{3}}$ + + + 1

Logo, $a = 1/\sqrt{3}$ é ponto de mínimo e a equação da reta tangente nesse ponto é

$$\boxed{y - \frac{2}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

3-) Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) (1,5 pontos) $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$

(b) (1,5 pontos) $\int \frac{dx}{x^3 - 8} \, dx$

(a) $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx \overset{(*)}{=} -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x \, dx \overset{(**)}{=}$

(*) Usamos integração por partes:

$u = e^{2x} \quad du = 2e^{2x}dx$

$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad v = -\cos x$

(**) Usamos integração por partes em $\int e^{2x}\cos x \, dx$

fazendo agora $u = e^{2x} \quad dv = \cos x \, dx$

$du = 2e^{2x} \quad v = \operatorname{sen} x$

$\overset{(**)}{=} -e^{2x}\cos x + 2\left[e^{2x}\operatorname{sen} x - 2\int e^{2x}\operatorname{sen} x\right]$

logo: $\int e^{2x}\operatorname{sen} x \, dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\operatorname{sen} x - 4\int e^{2x}\operatorname{sen} x \, dx$

Portanto $\boxed{\int e^{2x}\operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{5}\left[2e^{2x}\operatorname{sen} x - e^{2x}\cos x\right] + K, \quad K \in \mathbb{R}}$

b) $\frac{1}{x^3-8} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} = \frac{A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)}{x^3-8}$

$= \frac{(A+B)x^2 + (2A-2B+C)x + (4A-2C)}{x^3-8}$

Logo: $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B+C=0 \\ 4A-2C=1 \end{cases}$ Resolvendo o sistema obtemos: $A = 1/12$, $B = -1/12$ e $C = -\frac{1}{3}$.

Assim $\int \frac{dx}{x^3-8} = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{-1/12\,x - 1/3}{x^2+2x+4}\,dx$

$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\int \frac{1/4\,x + 1}{x^2+2x+4}\,dx.$

Cálculo de

$\int \frac{1/4\,x+1}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{1/4\,x+1}{(x+1)^2+3}\,dx \overset{(*)}{=} \int \frac{1/4\,(u-1)+1}{u^2+3}\,du$

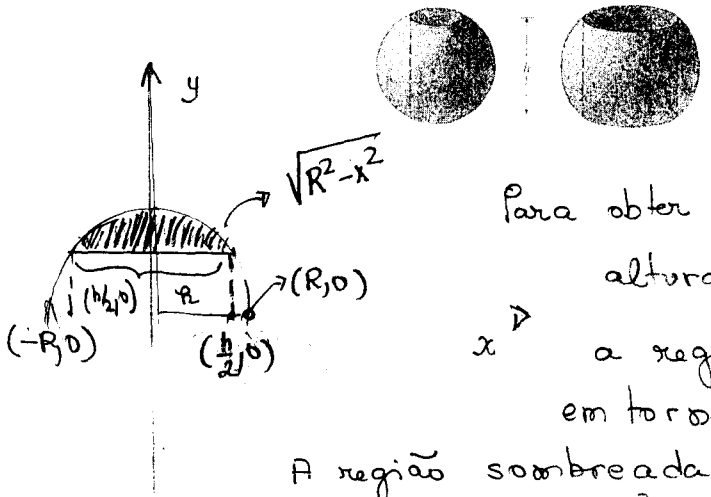
(*) $u = x+1$, $du = dx$, $x = u-1$

$= \frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+3}\,du + \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2+3} = \frac{1}{8}\ln(u^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + K$

$= \frac{1}{8}\ln(x^2+2x+4) + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + K$

logo: $\boxed{\int \frac{dx}{x^3-8} = \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}}$

4-) (2,0 pontos) Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, calcule o volume do anel.



Para obter o anel esférico de altura h, basta girar a região sombreada em torno do eixo x.

A região sombreada é:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2} \text{ e } \sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}\right\}$$

Portanto, pela simetria, o volume do anel esférico é:

$$V = 2\pi \int_0^{h/2} \left[\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 - \left(\sqrt{R^2-h^2/4}\right)^2\right] dx$$

$$= 2\pi \int_0^{h/2} \left(R^2 - x^2 - R^2 + h^2/4\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - x^2\right) dx = 2\pi \left[\frac{h^2}{4}x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{h/2}$$

$$= 2\pi \left[\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24}\right] = \frac{4\pi \cdot h^3}{24}.$$

1-) (3,0 pontos) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-x}x^3$. Esboce o gráfico de f, levando-se em conta os intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e limites em $\pm\infty$. Indique os pontos críticos e os pontos de inflexão.

$D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \frac{1}{e^x} = -\infty$$

($x^3 \to -\infty$; $\frac{1}{e^x} \to +\infty$; $e^x \to 0$ e $e^x > 0$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

($x^3 \to +\infty$; $e^x \to +\infty$; $3x^2 \to +\infty$; $e^x \to +\infty$; $6x \to +\infty$; $e^x \to +\infty$)

(Logo $y = 0$ é assíntota horizontal para $x \to +\infty$.)

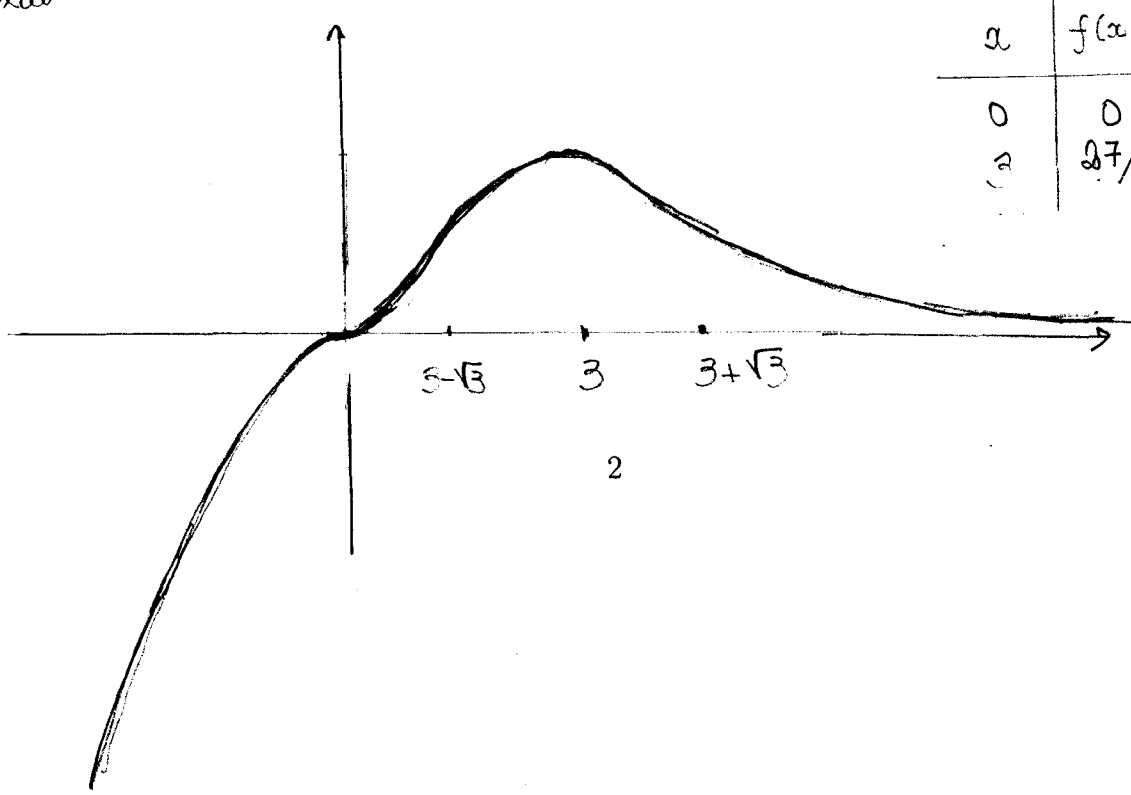
$$f'(x) = -e^{-x}x^3 + 3x^2e^{-x} = e^{-x}(3x^2 - x^3) = \underbrace{e^{-x}x^2}_{>0}(3-x)$$

	$x<0$	$x=0$	$0<x<3$	$x=3$	$x>3$
f'	+	0	+	0	−
f	↗		↗	pto de máx. local	↘

$$f''(x) = -e^{-x}(3x^2 - x^3) + e^{-x}(6x - 3x^2) = e^{-x}(6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3)$$

$$= xe^{-x}(x^2 - 6x + 6)$$

	$x<0$	$x=0$	$0<x<3-\sqrt{3}$	$x=3-\sqrt{3}$	$3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3}$	$x=3+\sqrt{3}$	$x>3+\sqrt{3}$
x	−	0	+	+	+	+	+
x^2-6x+6	+	+	+	0	−	0	+
f''	−	0	+	0	−	0	+

ptos de inflexão: 0, $3+\sqrt{3}$ e $3-\sqrt{3}$

x	$f(x)$
0	0
3	$27/e^3 > 1$