(b) $\int x^3 (\ln x)^2 \, dx =$

Vamos usar integração por partes

$u = (\ln x)^2 \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$dv = x^3 dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^4}{4}$

$$= (\ln x)^2 \cdot \frac{x^4}{4} - \underbrace{\int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \ln x \, \frac{1}{x} \, dx}_{(**)}$$

Calcular

$$\frac{1}{2} \int x^3 \ln x \, dx \underset{\text{partes}}{=} \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx \right]$$

$u = \ln x \quad du = 1/x \, dx$

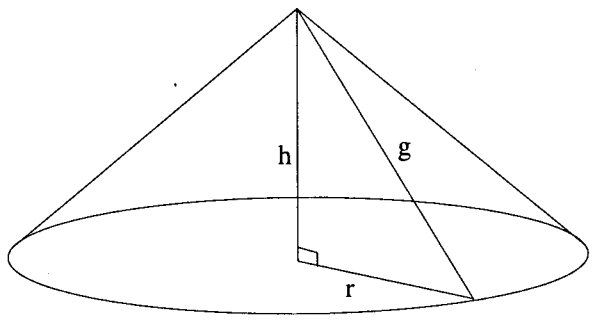
$dv = x^3 dx \quad v = \frac{x^4}{4}$

$$= \frac{1}{8} x^4 \ln x - \frac{1}{8} \int x^3 dx = \frac{1}{8} x^4 \ln x - \frac{1}{32} x^4 + C$$

$C \in \mathbb{R}$

Logo $\int x^3 (\ln x)^2 dx = \frac{x^4}{4} (\ln x)^2 - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{x^4}{32} + C, \; C \in \mathbb{R}$

2. (1,5) Um triângulo retângulo, cuja hipotenusa tem comprimento igual a **g**, é rotacionado em torno do cateto de comprimento **h** para gerar um cone circular reto conforme a figura. Encontre os comprimentos **h** e **r** dos catetos do triângulo para que o volume do cone feito dessa maneira seja máximo. OBS: a resposta deve estar em função de **g**.



O volume do cone é

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Temos que $h^2 + r^2 = g^2$. É fácil então escrever V em função de h.

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi (g^2 - h^2) h.$$

Queremos então achar $0 < h < g$ tal que $V(h)$ é máximo.

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi \left[-2h\,h + (g^2 - h^2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left[g^2 - 3h^2\right]$$

$V'(h) = 0 \Rightarrow h = \pm \frac{g}{\sqrt{3}}$, como só interessa $h > 0$ temos:

V': $+ + + +$ | $- - - -$

0 $\quad g/\sqrt{3} \quad$ g

Pela análise acima, o máximo de $V(h)$ ocorre quando $\boxed{h = g/\sqrt{3}}$. Então $r^2 = g^2 - \frac{g^2}{3} = \frac{2g^2}{3}$.

Logo $\boxed{r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} g}$.

3. Seja $f(x) = x - 2\text{arctg}x$.

(a) **(0,5)** Determine o domínio de f. Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

(b) **(0,5)** Estude a concavidade de f.

(c) **(0,5)** Calcule os limites necessários de f.

(d) **(0,5)** Verifique se existem assíntotas verticais, horizontais e inclinadas.

(e) **(1,0)** Esboce o gráfico de f.

(a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

f': $+ + + +$ | -1 | $- - - -$ | 1 | $+ + + +$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

f é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e decrescente em $]-1, 1[$.

(b) $$f''(x) = +\frac{2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$- - - - - -$ | 0 | $+ + + + + +$

$\frown$ $\smile$

(c) $$\lim_{x \to +\infty} [x - 2\underbrace{\text{arctg}x}_{\to \pi/2}] = +\infty \qquad \left(\lim_{x \to \pm\infty} \text{arctg}x = \pm \pi/2\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} [x - 2\underbrace{\text{arctg}x}_{\to -\pi/2}] = -\infty$$

(d) Como $D_f = \mathbb{R}$, não existem assíntotas verticais. Por (c) temos que não existem assíntotas horizontais.

Verificar se existem assíntotas inclinadas:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[1 - 2\underbrace{\text{arctg}x}_{\to \pi/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right] = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} -2\,\text{arctg}x = -2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Logo, a reta $y = x - \pi$ é assíntota para $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[1 - 2\underbrace{\text{arctg}x}_{\to -\pi/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right] = 1$$

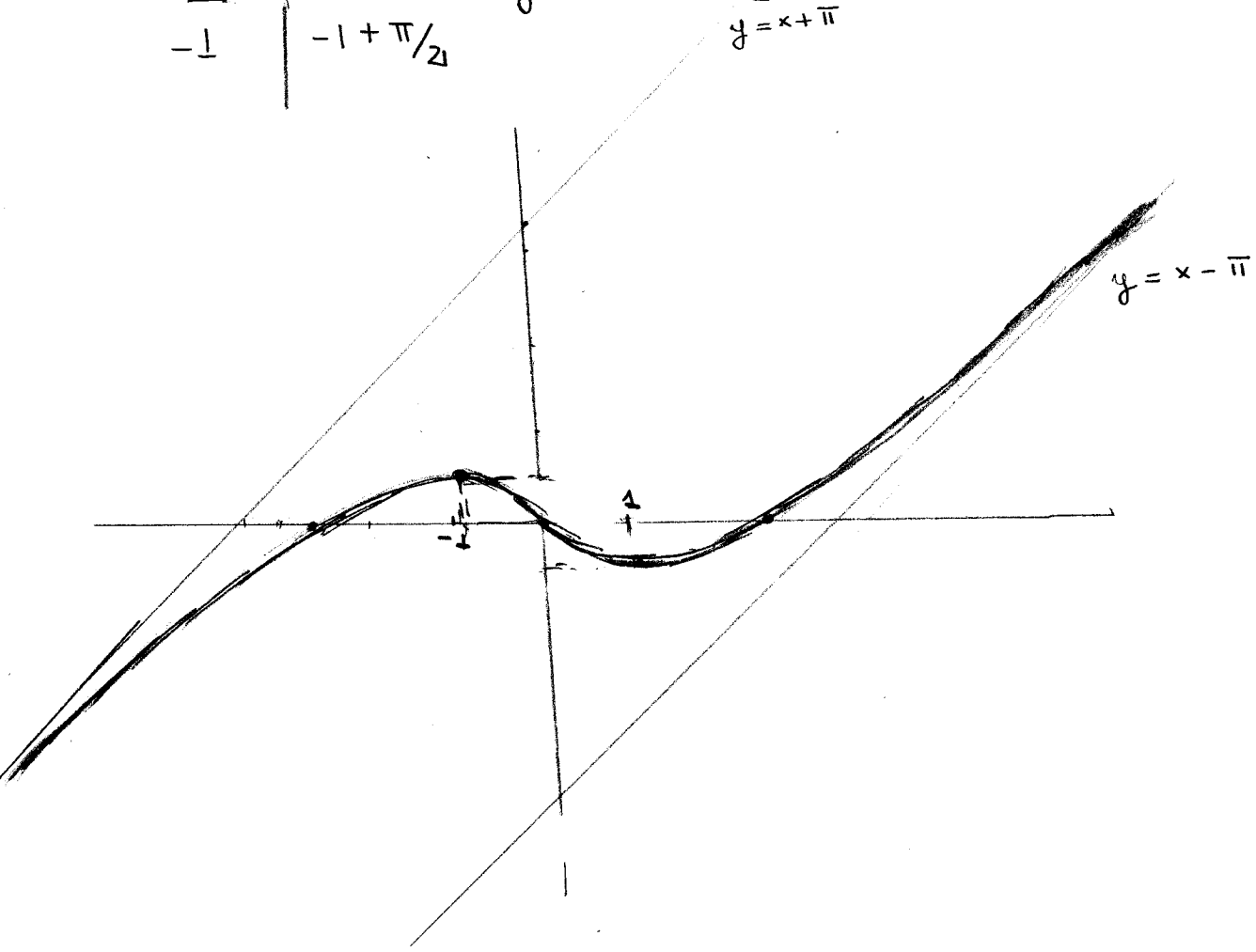
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to -\infty} [-2\,\text{arctg}x] = -2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Assim, $y = x + \pi$ é assíntota para $x \to -\infty$.

Gráfico:

Observe que $f(-x) = -f(x)$

x	$f(x)$
0	0
1	$1 - 2.\text{arctg}1 = 1 - \pi/2$
-1	$-1 + \pi/2$



4. **(1,0)** Calcule o seguinte limite, caso exista.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{1/x} e^{t^2}\,dt}{e^{-x}}.$$

Seja $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$. Então $F'(x) = e^{x^2}$ pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_0^{1/x} e^{t^2}\,dt = F(1/x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{1/x} e^{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} F(1/x) = F(0) = 0$$

↳ F é contínua

Também vale que

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{1/x} e^{t^2}\,dt}{\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^{1/x} e^{t^2}\,dt\right)'}{(e^{-x})'} \quad (*)$$

desde que o limite (*) exista.

$$(F(1/x))' = F'(1/x)\cdot(+1/x)' = F'(1/x)(-1/x^2)$$
$$= e^{1/x^2}\cdot(-1/x^2)$$

Assim, $(*) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1/x^2}\cdot(-1/x^2)}{-e^{-x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x^2+x}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} = \lim_{x\to+\infty} e^{1/x^2}\cdot\frac{e^x}{x^2}$$

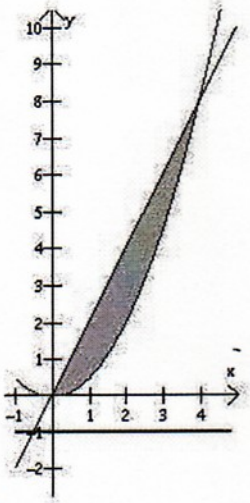
Mas $\lim_{x\to+\infty} e^{1/x^2} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Logo $\lim_{x\to+\infty} e^{1/x^2}\cdot\dfrac{e^x}{x^2} = +\infty = (*)$.

Logo $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^{1/x} e^{t^2}\,dt}{e^{-x}} = +\infty$

5. **(1,5)** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = -1$ da região limitada pelas curvas $y = 2x$ e $y = \dfrac{x^2}{2}$.

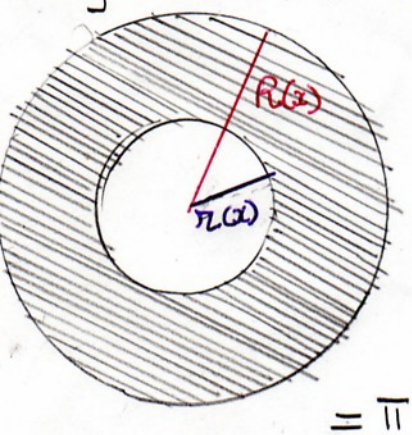


$$2x = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

$$4x \geq x^2 \Leftrightarrow 4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(4-x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$$

O eixo de revolução é a reta $y = -1$. Quando a região acima girar em torno de $y = -1$, vamos obter um sólido cujas intersecções por planos P_x, ortogonais a $y = -1$ em x, são "arruelas" cuja área



$$A(x) = \pi\left[R(x)^2 - r(x)^2\right]$$

onde $R(x) = 2x + 1$ e $r(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$

$$\text{Logo } V = \int^4 \pi\left[(2x+1)^2 - \left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2\right]dx$$

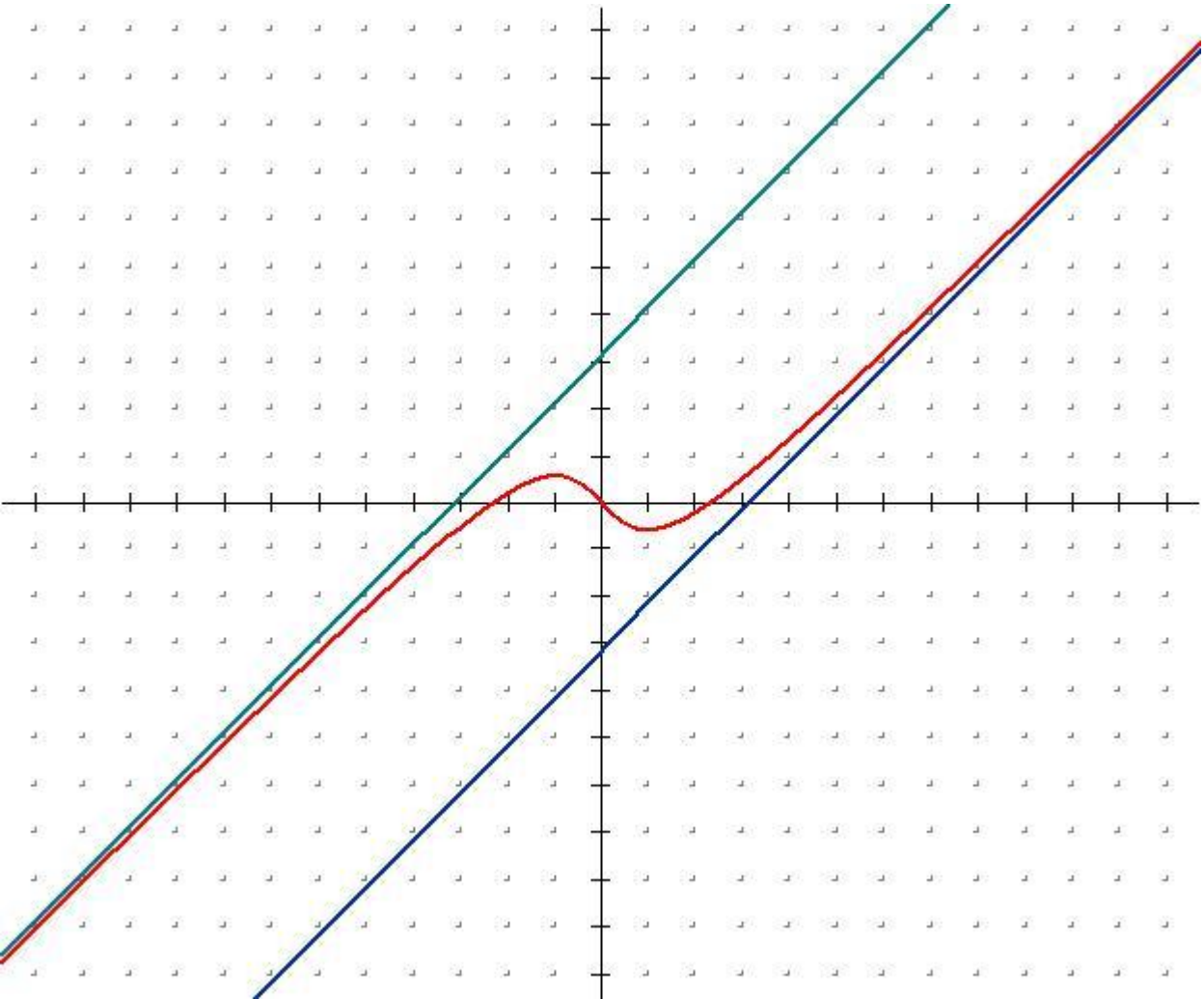
$$= \pi\int_0^4 \left[4x^2 + 4x + \cancel{1}^{\,0} - \frac{x^4}{4} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \cancel{1}\right]dx$$

$$= \pi\int_0^4 \left(3x^2 + 4x - \frac{x^4}{4}\right)dx = \pi\left[\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{4x^2}{2} - \frac{x^5}{20}\right]_0^4$$

$$= \pi\left[4^3 + 2.4^2 - 4^5/\cancel{20}_{\,5}\right]$$

$$= \frac{\pi}{5}\left[5.4^3 + 10.4^2 - 4^4\right] = \frac{4^2}{5}\pi\left[20 + 10 - 16\right]$$

$$= \frac{16 \times 14}{5}\pi$$



Recuperação de MAT-2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

POLI - USP - 24/07/2007

TURMA:_____

Nome_____

Assinatura_____

Número USP _____ Professor: _____

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES

1. Calcule as seguintes integrais:

   (a) **(1,5)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+2x+3)}$

   (b) **(1,5)** $\displaystyle\int x^3(\ln x)^2 dx$

(a) Pelo método das frações parciais

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} = \frac{A(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x+3)}$$

Temos então que $A(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x+1) = 1$

$1 = A((-1)^2+2(-1)+3) = 2A \Rightarrow \boxed{A = 1/2}$

$(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + (3A+C) = 1$

$A+B = 0$ e $A = 1/2 \Rightarrow \boxed{B = -1/2}$

$3A + C = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{3}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

Assim

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+2x+3} \quad (*)$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\underbrace{x^2+2x+3}_{u}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$u = x^2+2x+3$

$du = (2x+2)\,dx$

Logo $(*) = \boxed{\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+2x+3) + C \quad C \in \mathbb{R}}$