MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I
Prova de Recuperação

	Q	N
Nome:_____	1	
No. USP:_____ RG:_____	2	
Turma:_____ Professor:_____	3	
Assinatura:_____	4	
	Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES.

QUESTÃO **1.** (2,5) *Determine o volume do sólido cuja base é um círculo de raio 1 e cujas seções transversais a esta base são quadrados.*

RESPOSTA: Sem perda de generalidade, pode-se assumir que a base do sólido em questão é o círculo de raio unitário centrado na origem, no plano Oxy. Para cada $x \in [-1,1]$, a seção do sólido perpendicular ao eixo Ox, pelo ponto de abscissa x, é um quadrado de lado $2\sqrt{1-x^2}$, cuja área é $A(x) = 4(1-x^2)$. Assim, o volume do sólido é dado por $\int_{-1}^{1} A(x)\,dx = 4\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = 8\int_0^1(1-x^2)\,dx = 8\Big[x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{16}{3}$.

QUESTÃO **2.** (2,5) *Determine a equação da(s) reta(s) que são simultaneamente tangentes aos gráficos de $f(x) = \frac{1}{x}$ e de $g(x) = x^2$.*

RESPOSTA: Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x) = x^2$ no ponto $\big(x_0, g(x_0)\big)$ é $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$, i.e. $y = (2x_0)x - x_0^2$. Por outro lado, dado $x_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $\big(x_1, f(x_1)\big)$ é $y - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{x_1^2}(x - x_1)$, i.e. $y = -\frac{1}{x_1^2}\,x + \frac{2}{x_1}$. Assim, uma condição necessária e suficiente para que uma reta de equação $y = px + q$ pertença à intersecção dos dois feixes de retas tangentes é $(\exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists x_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\})p = 2x_0 = -\frac{1}{x_1^2}$ e $q = -x_0^2 = \frac{2}{x_1}$, o que é equivalente a $x_0 = -2$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $p = -4$ e $q = -4$. Assim, $y = -4x - 4$ é a única reta simultaneamente tangente aos dois gráficos.

QUESTÃO **3.** (2,0)*Determine a razão entre a altura e o diâmetro da base do cilindro de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio R.*

RESPOSTA: Uma condição necessária e suficiente para que um cilindro cujo raio da base é r e cuja altura é h possa ser inscrito numa esfera de raio R é $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$, i.e. $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$. Assim, o volume de um tal cilindro será dado por $V = \pi r^2 h = \pi R^2 h - \pi\frac{h^3}{4}$. O problema se reduz, pois, a se encontrar (caso exista) o(s) ponto(s) de máximo da função $V :]0, 2R[\to \mathbb{R}$ dada por $V(h) = \pi R^2 h - \pi\frac{h^3}{4}$. Tal função é derivável até segunda ordem e suas derivadas primeira e segunda são dadas por, respectivamente, $\big(\forall\, h \in]0, 2R[\big)\, V'(h) =$

$\pi R^2 - \pi\frac{3h^2}{4}$, $V''(h) = -\pi\frac{3h}{2}$. Como V' se anula em $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ e $V'' < 0$ em $]0, 2R[$, segue-se do teste da derivada segunda que $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ é o ponto de máximo global de V. Assim, a razão entre a altura e o diâmetro da base do cilindro de maior volume inscrito numa esfera de raio R é dada por $h/2r = \frac{2R}{\sqrt{3}}\,/2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

QUESTÃO **4.** *Calcule as integrais:*

(a) (1,0) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx$

(b) (1,0) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$

(c) (1,0) *Decida se a integral imprópria converge ou diverge:* $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^5}\, dx$

RESPOSTA:

(a) Pondo $u = \cos x$, tem-se $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx = -\int \frac{(1-u^2)}{u^4}\, du = -\int u^{-4}\, du + \int u^{-2}\, du = -\frac{u^{-3}}{-3} + \frac{u^{-1}}{-1} + k = \frac{\sec^3 x}{3} - \sec x + k$.

(b) Tem-se: $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 2^2$; assim, pondo $x - 1 = 2\tan u$, $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tem-se $dx = 2\sec^2 u\, du$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + k = \ln\Big(\frac{x-1}{2} + \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{4}}\Big) + k$.

(c) Como $\big(\forall\, x > 0\big)\ \ln x < x$, tem-se $\big(\forall\, x > 0\big)\ \frac{\ln x}{x^5} < \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4}$. Como $\int_2^\infty \frac{1}{x^4}\, dx$ é convergente, segue-se do critério de comparação que $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^5}\, dx$ é convergente.