Questão 1. (2,0 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+9x^2)}{\operatorname{arctg}(3x)}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) Determine L, sabendo que f é contínua no ponto $x = 0$.

b) É f derivável no ponto $x = 0$? Se for, calcule $f'(0)$.

a) Para que f seja contínua em $x=0$, devemos ter

$$L = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+9x^2)}{\operatorname{arctg}(3x)} \overset{L'H}{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+9x^2}\cdot 18x}{\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3} = \lim_{x\to 0} 6x = 0$$

Portanto, $L = 0$

b) f é derivável em $x=0$ se existir $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Pela parte a), $f(0) = 0$.

Então

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+9x^2)}{x\operatorname{arctg}(3x)} \overset{L'H}{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+9x^2}\cdot 18x}{\operatorname{arctg}(3x) + \frac{3x}{1+9x^2}}$$

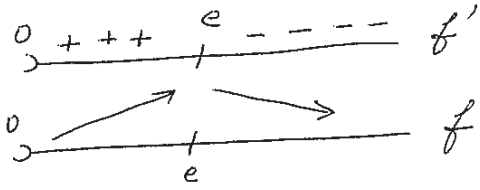
$$= \lim_{x\to 0} \frac{18x}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}(3x)+3x} \overset{L'H}{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0} \frac{18}{18x\operatorname{arctg}(3x) + (1+9x^2)\cdot\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3 + 3} = \frac{18}{6} = 3$$

Logo, f é derivável em $x=0$ e $f'(0) = 3$.

Questão 2 - A

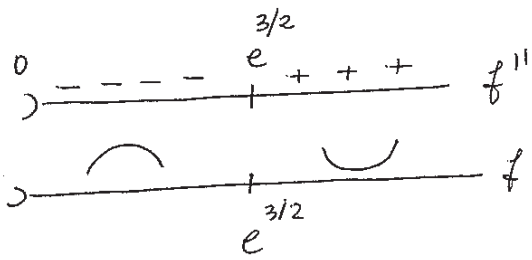
a) Domínio de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. $\quad Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$



f é crescente em $]0, e]$ e decrescente em $[e, +\infty[$.

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x^2 - (1 - \ln x)\,2x}{x^4} = \frac{(2\ln x - 3)}{x^3} \qquad (x>0)$$



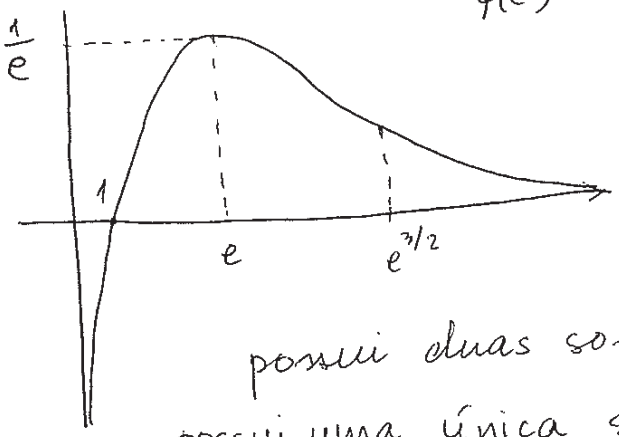
$e^{3/2}$ é um ponto de inflexão

limites pertinentes:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\uparrow +\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{\uparrow -\infty} = -\infty$$

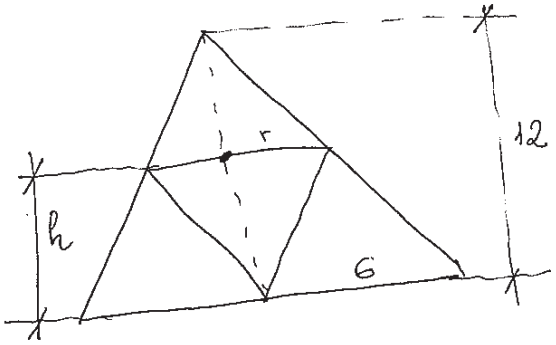
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{L'Hospital} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$



b) Como $x>0$, $\ln x = kx \iff \dfrac{\ln x}{x} = k$. Do gráfico, se $0 < k < 1/e$, $f(x) = k$ possui duas soluções. Se $k = 1/e$, $f(x) = k$ possui uma única solução e, se $k < 0$, $f(x) = k$ possui uma única solução.

Questão 5-H



Por semelhança de triângulos:

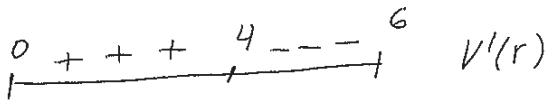
$$\frac{r}{6} = \frac{12-h}{12}$$, ou seja:

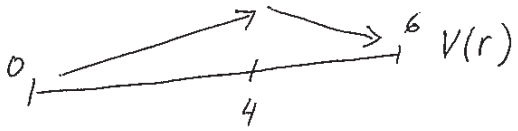
$$h = 12 - 2r$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \qquad 0 \le r \le 6$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (12-2r) = -\frac{2}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2$$

$$V'(r) = -2\pi r^2 + 8\pi r = 2\pi r(4-r)$$





Assim, $r = 4$ (e, portanto, $h = 4$) corresponde a um máximo local (e global) no intervalo $[0, 6]$

Note-se que $V(0) = V(6) = 0$.

$$V_{máx} = \frac{1}{3}\pi 4^2 \cdot 4 = \frac{64\pi}{3}\ cm^3.$$

Questão 4. (2,0 pontos)

a) Calcule $\int x^7 \operatorname{sen}(x^4)dx$.

b) Seja $f(x) = \int_{2-x}^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt$. Calcule $f'(x)$ e determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

(a) $\int x^7 \operatorname{sen}(x^4)\,dx = \int x^4 \operatorname{sen}(x^4)\,\frac{1}{4}\,4x^3\,dx$

$= \frac{1}{4}\int y \operatorname{sen} y\,dy$ $\quad y = x^4$, $dy = 4x^3dx$

$= \frac{1}{4}[-y\cos y + \int \cos y]$ $\quad$ partes: $u = y \Rightarrow du = dy$, $dv = \operatorname{sen} y\,dy \Rightarrow v = -\cos y$

$= \frac{1}{4}(-y\cos y + \operatorname{sen} y) + C = \frac{1}{4}\left(-x^4\cos(x^4) + \operatorname{sen}(x^4)\right) + C$

(b) Seja $G(x)$ uma primitiva de $\sqrt{1+x^3}$ (tal G existe pois $\sqrt{1+x^3}$ é uma função contínua e o TFC garante sua existência). Também pelo TFC:

$f(x) = \int_{2-x}^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt = G(x^2) - G(2-x)$.

Assim:

$f'(x) = G'(x^2)\cdot 2x - G'(2-x)\cdot(-1)$

$= \sqrt{1+(x^2)^3}\cdot 2x + \sqrt{1+(2-x)^3}$

$f(1) = \int_{2-1}^{1} \sqrt{1+t^3}\,dt = 0$

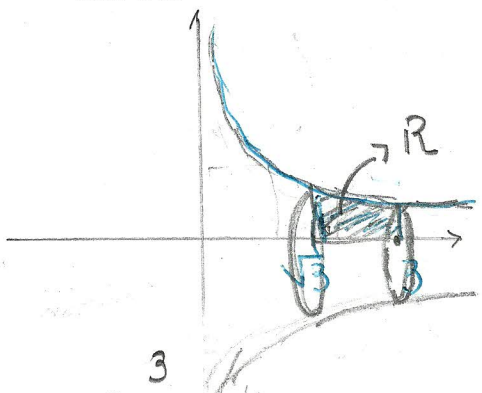
$f'(1) = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é

$y = 3\sqrt{2}(x-1)$

-A-

Questão 5. (2,0 pontos) Seja R a região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt[4]{x^2+9}}$, o eixo Ox e as retas $x = \sqrt{3}$ e $x = 3$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de R ao redor do eixo Ox.



$f(x) > 0 \quad \forall\, x > 0$

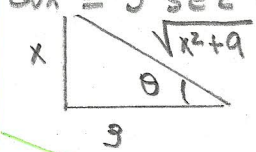
$\left(\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\right)$

$$V = \pi \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}\, dx$$

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}\, dx =$$

$x = 3\,tg\,\theta, \quad \theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$



$x = 3 \Rightarrow 3\,tg\,\theta = 3 \Rightarrow tg\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$

$x = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = 3\,tg\,\theta \Rightarrow tg\,\theta = \sqrt{3}/3 \Rightarrow \theta = \pi/6$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{9\,tg^2\theta \cdot 3\sec\theta} 3\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sec\theta}{tg^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos\theta}{sen^2\theta}\, d\theta =$$

$u = sen\,\theta$

$du = \cos\theta\, d\theta$

$\theta = \pi/6 \Rightarrow u = 1/2$

$\theta = \pi/4 \Rightarrow u = \sqrt{2}/2$

$$= \frac{1}{9}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{u^2}\, du = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{u}\right]_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{9}\left[-\sqrt{2} + 2\right]$$

Logo $V = \dfrac{\pi}{9}\left[2 - \sqrt{2}\right]$

Questão 1. (2,0 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+4x^2)}{\operatorname{arctg}(2x)}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) Determine L, sabendo que f é contínua no ponto $x = 0$.

b) É f derivável no ponto $x = 0$? Se for, calcule $f'(0)$.

a) Para que f seja contínua em $x=0$, devemos ter

$$L = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{\operatorname{arctg}(2x)} \overset{L'H}{\underset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 8x}{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2} = \lim_{x\to 0} 4x = 0.$$

Portanto, $L = 0$.

b) f é derivável em $x=0$ se existir $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Pelo item a), $f(0)=0$. Então

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{x\operatorname{arctg}(2x)} \overset{L'H}{\underset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 8x}{\operatorname{arctg}(2x)+\frac{2x}{1+4x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x}{(1+4x^2)\operatorname{arctg}(2x)+2x} \overset{L'H}{\underset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{8}{8x\operatorname{arctg}(2x)+(1+4x^2)\cdot\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2+2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Logo, f é derivável em $x=0$ e $f'(0)=2$.

Veja a prova A!

Veja a prova A!

Questão 4. (2,0 pontos)

a) Calcule $\int x^7 \cos(x^4) dx$.

b) Seja $f(x) = \int_{2-x}^{x^3} \sqrt{1+t^3}\, dt$. Calcule $f'(x)$ e determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

(a) $\int x^7 \cos(x^4)\, dx = \int x^4 \cos(x^4) \cdot \frac{1}{4} 4x^3\, dx$

$y = x^4$
$dy = 4x^3 dx$

$\frac{1}{4} \int y \cos y\, dy =$

Integração por partes
$u = y \Rightarrow du = dy$
$dv = \cos y\, dy \quad v = \operatorname{sen} y$

$\frac{1}{4}\left(y \operatorname{sen} y + \int \operatorname{sen} y\, dy\right) = \frac{1}{4}\left[y \operatorname{sen} y + \cos y\right] + C$

$= \frac{1}{4}\left[x^4 \operatorname{sen}(x^4) + \cos(x^4)\right] + C$

(b) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1+x^3}$ é contínua.
Pelo TFC, existe $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G'(x) = \sqrt{1+x^3}$.
Pelo TFC, $f(x) = \int_{2-x}^{x^3} \sqrt{1+t^3}\, dt = G(x^3) - G(2-x)$.

Logo $f'(x) = G'(x^3) \cdot 3x^2 - G'(2-x) \cdot (-1)$

$= \sqrt{1+(x^3)^3} \cdot 3x^2 + \sqrt{1+(2-x)^3}$

$f(1) = \int_1^1 \sqrt{1+t^3}\, dt$

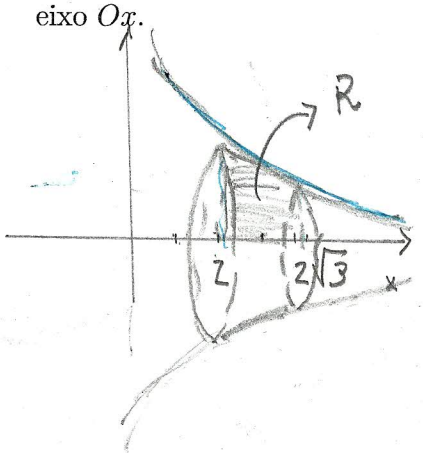
$f'(1) = 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$

A equação a reta tangente ao gráfico de f em $x=1$ é

$y = 4\sqrt{2}(x-1)$.

-B-

Questão 5. (2,0 pontos) Seja R a região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt[4]{x^2+4}}$, o eixo Ox e as retas $x = 2$ e $x = 2\sqrt{3}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de R ao redor do eixo Ox.



$f(x) > 0 \quad \forall x > 0$

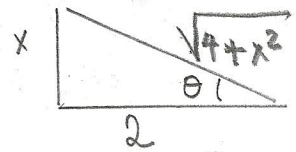
$\left(\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \in \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \right)$

$$V = \pi \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\, dx$$

$x = 2\operatorname{tg}\theta, \ \theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

$dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$



$$= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\operatorname{tg}^2\theta\, 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta\, d\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$u = \operatorname{sen}\theta$

$du = \cos\theta\, d\theta$

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{-1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

Logo $V = \pi \left[-\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{4x} \right]_2^{2\sqrt{3}}$

$$= \pi\left[-\frac{4}{8\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{8} \right] = \pi\left[\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right]$$