1. (2,5) Considere $f(x) = \ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, determine o número de soluções da equação $f(x) = k$.

   Resolução: Note que $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Além disso, temos que:

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)) = -\pi,$$

   já que

   $$\lim_{x\to 0^+} (1+x^2) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x^2) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \text{arctg}(1/x) = \frac{\pi}{2},$$

   usando a continuidade das funções envolvidas.

   De modo análogo,

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)) = \pi,$$

   uma vez que

   $$\lim_{x\to 0^-} (1+x^2) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} \ln(1+x^2) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \text{arctg}(1/x) = -\frac{\pi}{2}.$$

   Por outro lado,

   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (\ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)) = +\infty,$$

   já que

   $$\lim_{x\to +\infty} (1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \text{arctg}(1/x) = 0,$$

   pela continuidade de cada uma das funções envolvidas.

   De modo análogo,

   $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (\ln(1+x^2) - 2\text{arctg}(1/x)) = +\infty,$$

   uma vez que

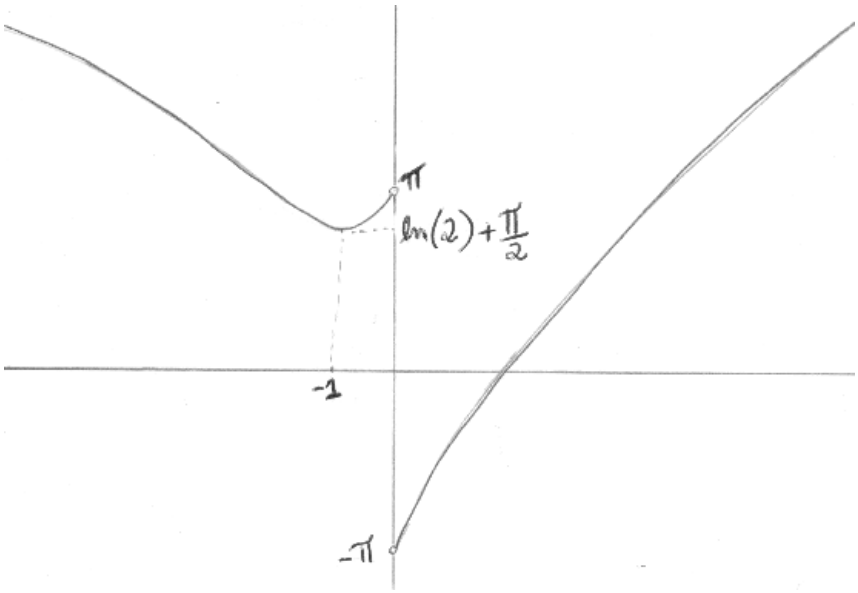
   $$\lim_{x\to -\infty} (1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} \ln(1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \text{arctg}(1/x) = 0.$$

Além disso,

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - (\frac{2}{1+(\frac{1}{x})^2})(-\frac{1}{x^2}) = \frac{2x+2}{1+x^2}.$$

Logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = -1$, $f'(x) < 0$ se $x < -1$ e $f'(x) > 0$ se $x > -1$. Daí, f é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, -1[$ e é estritamente crescente nos intervalos $]-1, 0[$ e $]0, \infty[$. Portanto, $f(-1) = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$ é um ponto de mínimo local de f.

Obtemos assim um esboço do gráfico de f:



Concluímos então que $f(x) = k$:

- não tem soluções reais para $k \leq -\pi$,
- tem uma única solução real para $-\pi < k < \ln(2) + \frac{\pi}{2}$,
- tem duas soluções reais para $k = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$ ou $k \geq \pi$,
- tem três soluções reais para $\ln(2) + \frac{\pi}{2} < k < \pi$.

2. (a) (1,0) Para cada $t > 1$ seja $A(t)$ a área da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ no intervalo $[t, 2t]$. Para qual $t > 1$ a área $A(t)$ é mínima? (**Dica:** Não tente usar técnicas de primitivação para encontrar uma primitiva de $\dfrac{1}{\ln x}$.)

Resolução: Para $t > 1$, $A(t) = \int_t^{2t} \frac{1}{\ln(x)} dx$. Segue pela Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo que $A'(t) = \frac{2}{\ln(2t)} - \frac{1}{\ln(t)} = \frac{2\ln(t) - \ln(2t)}{\ln(2t)\cdot\ln(t)}$. Assim, $A'(t) = 0$ se, e somente se, $2\ln(t) - \ln(2t) = 0$ se, e somente se, $t = 2$. Além disso, $A'(t) < 0$ se $1 < t < 2$ e $A'(t) > 0$ se $t > 2$. Portanto, $A(t)$ é mínima para $t = 2$.

(b) (1,5) Seja

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{x+1}{\sqrt{(x+2)(x+3)}} \right\}.$$

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Ox.

Resolução: Como as seções transversais do sólido são círculos de raio $\frac{x+1}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$, temos que o volume do sólido é

$$\int_1^2 \pi \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x+3)} dx = \pi \int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6} dx.$$

Fazendo a divisão de polinômios, obtemos que

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6} = 1 - \frac{3x+5}{x^2+5x+6} = 1 - \frac{3x+5}{(x+2)(x+3)}.$$

Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{3x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}.$$

Daí, obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 3A + 2B = 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $A = -1$ e $B = 4$. Logo,

$$\int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6} dx = \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{-1}{x+2} dx - \int_1^2 \frac{4}{x+3} dx.$$

Como

$$\int dx = x, \quad \int \frac{-1}{x+2} = -\ln|x+2| \quad \text{e} \quad \int \frac{4}{x+3} dx = 4\ln|x+3|,$$

segue que

$$\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x+3)}dx = (2-1) + (\ln(4) - \ln(3)) - 4(\ln(5) - \ln(4))$$

$$= 1 + 5\ln(4) - \ln(3) - 4\ln(5) = 1 + \ln(1024/1875)$$

e o volume do sólido é

$$\pi(1 + 5\ln(4) - \ln(3) - 4\ln(5)) = \pi(1 + \ln(1024/1875)).$$

3. Calcule

(a) (1,5) $\int x \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$

(b) (1,5) $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$

a) $\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\operatorname{sen}^3 x \cos x}_{f'(x)} dx = x \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \int 1 \cdot \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} dx$

$\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{2}\right)$

$\therefore$

$\int x \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx = \frac{x \operatorname{sen}^4 x}{4} - \int \frac{1}{16}\left(\frac{3}{2} - 2\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{2}\right) dx$

$= \frac{x \operatorname{sen}^4 x}{4} - \frac{3}{32}x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{16} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{128} + K$

3

b) $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx = \int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\,dx$

$x = 1 + \operatorname{tg} t \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$dx = \sec^2 t\,dt$

$t = 0 \Rightarrow x = 1$

$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2$

$$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{2+\operatorname{tg} t}{\sec t}\cdot \sec^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} 2\sec t\,dt + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} t \sec t\,dt =$$

$$= 2\ln\left(|\sec t + \operatorname{tg} t|\right)\Big|_0^{\pi/4} + \sec t\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - 2\ln(1+0) + \sqrt{2} - 1 =$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \sqrt{2} - 1$$

4. (a) (1,0) Seja $f(x) = \text{arcsen}(\sqrt{1-x^4})$. Calcule $f'(0)$.

   (b) (1,0) Seja $g(x) = (2+\cos x)^{1/x^2}$. Calcule $g'(x)$.

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \text{arc sen}\left(\sqrt{1-x^4}\right) = \text{arc sen}(1) = f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0} [f(x) - f(0)] = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^4}\right)^2}} \cdot \frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^4}} \cdot \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$$

b) $g(x) = (2+\cos x)^{1/x^2} = e^{\frac{\ln(2+\cos x)}{x^2}}$

$$g'(x) = e^{\frac{\ln(2+\cos x)}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^4}\left[\frac{-\text{sen}\,x}{2+\cos x} \cdot x^2 - 2x\ln(2+\cos x)\right]$$

1. (2,5) Considere $f(x) = \ln(1+x^2) + 2\text{arctg}(1/x)$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, determine o número de soluções da equação $f(x) = k$.

   Resolução: Note que $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Além disso, temos que:

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln(1+x^2) + 2\text{arctg}(1/x)) = \pi,$$

   já que

   $$\lim_{x\to 0^+} (1+x^2) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x^2) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \text{arctg}(1/x) = \frac{\pi}{2},$$

   usando a continuidade das funções envolvidas.

   De modo análogo,

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\ln(1+x^2) + 2\text{arctg}(1/x)) = -\pi,$$

   uma vez que

   $$\lim_{x\to 0^-} (1+x^2) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} \ln(1+x^2) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \text{arctg}(1/x) = -\frac{\pi}{2}.$$

   Por outro lado,

   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (\ln(1+x^2) + 2\text{arctg}(1/x)) = +\infty,$$

   já que

   $$\lim_{x\to +\infty} (1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \text{arctg}(1/x) = 0,$$

   pela continuidade de cada uma das funções envolvidas.

   De modo análogo,

   $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (\ln(1+x^2) + 2\text{arctg}(1/x)) = +\infty,$$

   uma vez que

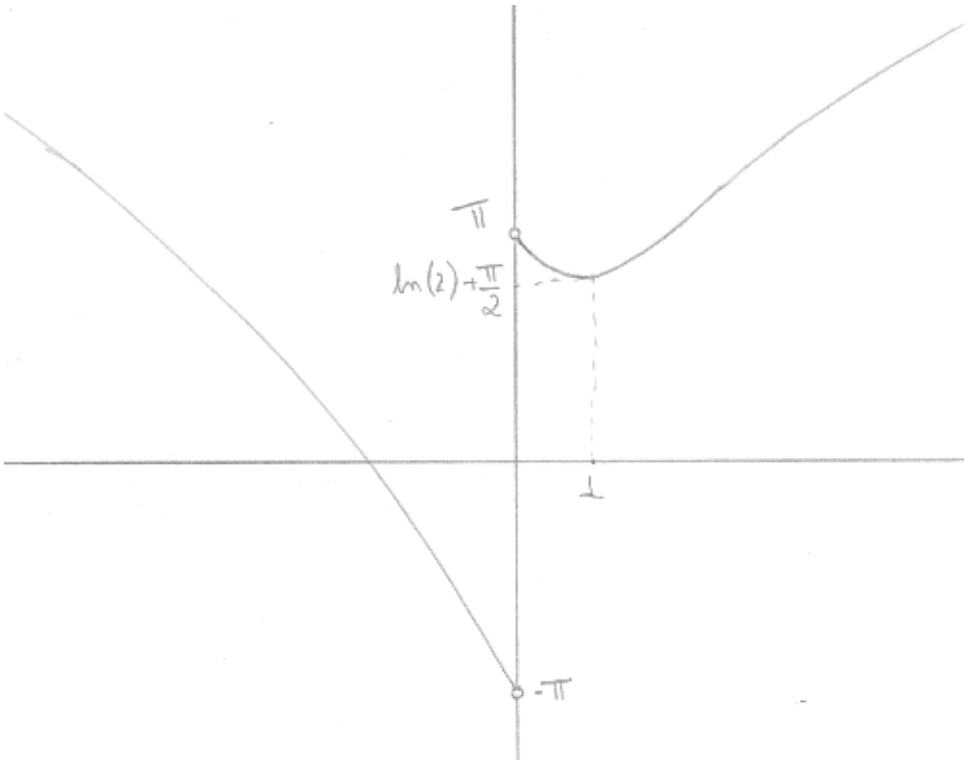
   $$\lim_{x\to -\infty} (1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} \ln(1+x^2) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \text{arctg}(1/x) = 0.$$

Além disso,

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + (\frac{2}{1+(\frac{1}{x})^2})(-\frac{1}{x^2}) = \frac{2x-2}{1+x^2}.$$

Logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1$, $f'(x) < 0$ se $x < 1$ e $f'(x) > 0$ se $x > 1$. Daí, f é estritamente decrescente nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, 1[$ e é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$. Portanto, $f(1) = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$ é um ponto de mínimo local de f.

Obtemos assim um esboço do gráfico de f:



Concluímos então que $f(x) = k$:

- não tem soluções reais para $k \leq -\pi$,
- tem uma única solução real para $-\pi < k < \ln(2) + \frac{\pi}{2}$,
- tem duas soluções reais para $k = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$ ou $k \geq \pi$,
- tem três soluções reais para $\ln(2) + \frac{\pi}{2} < k < \pi$.

2. (a) (1,0) Para cada $t > 1$ seja $A(t)$ a área da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ no intervalo $[t, 2t]$. Para qual $t > 1$ a área $A(t)$ é mínima? (**Dica:** Não tente usar técnicas de primitivação para encontrar uma primitiva de $\dfrac{1}{\ln x}$.)

Resolução: Para $t > 1$, $A(t) = \int_t^{2t} \frac{1}{\ln(x)} dx$. Segue pela Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo que $A'(t) = \frac{2}{\ln(2t)} - \frac{1}{\ln(t)} = \frac{2\ln(t) - \ln(2t)}{\ln(2t)\cdot\ln(t)}$. Assim, $A'(t) = 0$ se, e somente se, $2\ln(t) - \ln(2t) = 0$ se, e somente se, $t = 2$. Além disso, $A'(t) < 0$ se $1 < t < 2$ e $A'(t) > 0$ se $t > 2$. Portanto, $A(t)$ é mínima para $t = 2$.

(b) (1,5) Seja

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{x+2}{\sqrt{(x+3)(x+4)}} \right\}.$$

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Ox.

Resolução: Como as seções transversais do sólido são círculos de raio $\frac{x+2}{\sqrt{(x+3)(x+4)}}$, temos que o volume do sólido é

$$\int_0^1 \pi \frac{(x+2)^2}{(x+3)(x+4)} dx = \pi \int_0^1 \frac{x^2+4x+4}{x^2+7x+12} dx.$$

Fazendo a divisão de polinômios, obtemos que

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2+7x+12} = 1 - \frac{3x+8}{x^2+7x+12} = 1 - \frac{3x+8}{(x+3)(x+4)}.$$

Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{3x+8}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4} = \frac{Ax+4A+Bx+3B}{(x+3)(x+4)}.$$

Daí, obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 4A + 3B = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $A = -1$ e $B = 4$. Logo,

$$\int_0^1 \frac{x^2+4x+4}{x^2+7x+12} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{-1}{x+3} dx - \int_0^1 \frac{4}{x+4} dx.$$

Como

$$\int dx = x, \quad \int \frac{-1}{x+3} = -\ln|x+3| \quad \text{e} \quad \int \frac{4}{x+4} dx = 4\ln|x+4|,$$

segue que

$$\int_0^1 \frac{(x+2)^2}{(x+3)(x+4)}dx = (1-0) + (\ln(4) - \ln(3)) - 4(\ln(5) - \ln(4))$$

$$= 1 + 5\ln(4) - \ln(3) - 4\ln(5) = 1 + \ln(1024/1875)$$

e o volume do sólido é

$$\pi(1 + 5\ln(4) - \ln(3) - 4\ln(5)) = \pi(1 + \ln(1024/1875)).$$

3. Calcule

(a) (1,5) $\int x\cos^3 x\,\mathrm{sen}x\,dx$

(b) (1,5) $\int_2^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

a) $\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\overset{3}{\cos x}\,\mathrm{sen}\,x}_{f'(x)}\,dx = x\left(\frac{\overset{4}{-\cos x}}{4}\right) - \int 1\left(\frac{\overset{4}{-\cos x}}{4}\right)dx$

$\overset{4}{\cos x} = \left(\overset{2}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos(2x)+\overset{2}{\cos}(2x)\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos(2x)+\frac{\cos(4x)}{2}\right)$

$\therefore$

$\int x\overset{3}{\cos x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \frac{-x\overset{4}{\cos x}}{4} + \int \frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}+2\cos(2x)+\frac{\cos(4x)}{2}\right)dx$

$= \frac{-x\overset{4}{\cos x}}{4} + \frac{3}{32}x + \frac{1}{16}\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{128}\mathrm{sen}(4x) + K$

3 B

b) $\int_2^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx = \int_2^3 \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\,dx$

$x = 2 + \operatorname{tg} t \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$dx = \sec^2 t\,dt$

$t = 0 \Rightarrow x = 2$

$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 3$

$$\int_2^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{3+\operatorname{tg} t}{\sec t}\,\sec^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} 3\sec t\,dt + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} t \sec t\,dt =$$

$$= 3\ln\left(|\sec t + \operatorname{tg} t|\right)\Big|_0^{\pi/4} + \sec t\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= 3\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - 3\ln(1+0) + \sqrt{2} - 1 =$$

$$= 3\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \sqrt{2} - 1$$

4. (a) (1,0) Seja $f(x) = \text{arcsen}(\sqrt{1-x^4})$. Calcule $f'(0)$.

   (b) (1,0) Seja $g(x) = (2+\text{sen}x)^{1/x^2}$. Calcule $g'(x)$.

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \text{arc sen}\left(\sqrt{1-x^4}\right) = \text{arcsen}(1) = f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0} [f(x) - f(0)] = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^4}\right)^2}} \cdot \frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^4}} \cdot \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$$

b) $g(x) = (2+\text{sen}x)^{1/x^2} = e^{\frac{\ln(2+\text{sen}x)}{x^2}}$

$$g'(x) = e^{\frac{\ln(2+\text{sen}x)}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^4}\left[\frac{\cos x}{2+\text{sen}x} \cdot x^2 - 2x\ln(2+\text{sen}x)\right]$$