Gabarito da Prova Substitutiva
MAT-2453 - Tipo A

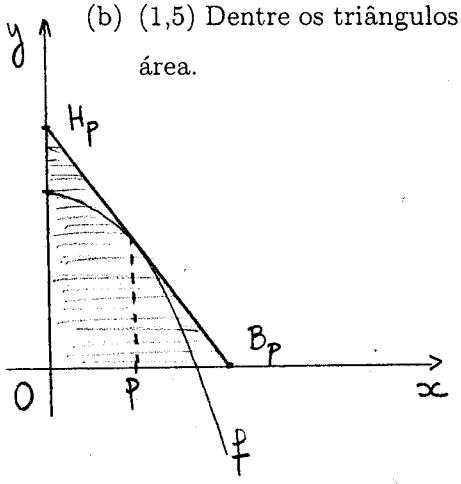
29 de Junho de 2011

A

Questão 1. Seja $f(x) = 1 - 2x^4$, definida para $x > 0$.

(a) (1,0) Para cada $p > 0$, determine a área do triângulo delimitado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ e pelos eixos Ox e Oy.

(b) (1,5) Dentre os triângulos obtidos como em (a), determine os vértices daquele que tem a menor área.



(a) $f'(x) = -8x^3$

reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$

$$y - (1 - 2p^4) = -8p^3(x - p)$$

$$\Leftrightarrow y = -8p^3 x + (6p^4 + 1)$$

Sejam H_p e B_p as interseções da reta tangente com os eixos Oy e Ox respectivamente. Então

$$H_p = (0, 6p^4 + 1) \quad \text{e} \quad B_p = \left(\frac{6p^4+1}{8p^3}, 0 \right)$$

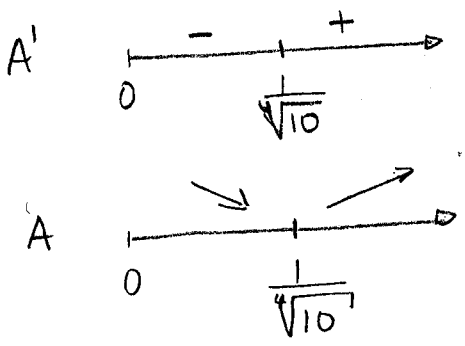
A área do triângulo $O H_p B_p$ é dada por

$$A(p) = \frac{1}{2} \frac{(6p^4+1)}{8p^3} \cdot (6p^4+1) = \frac{1}{16} (6p^4+1)^2 \cdot p^{-3}.$$

(b) $$A'(p) = \frac{1}{16} \cdot 2(6p^4+1) \cdot 24p^3 \cdot p^{-3} + \frac{1}{16}(6p^4+1)^2 \cdot (-3) p^{-4}.$$

$$A'(p) = \frac{1}{16}(6p^4+1)\left[48 - 3p^{-4}(6p^4+1) \right] = \underbrace{\frac{1}{16}(6p^4+1)}_{>0} \left(30 - \frac{3}{p^4} \right)$$

$$A'(p) = 0 \Leftrightarrow p^4 = \frac{1}{10} \underset{(p>0)}{\Leftrightarrow} p = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$$

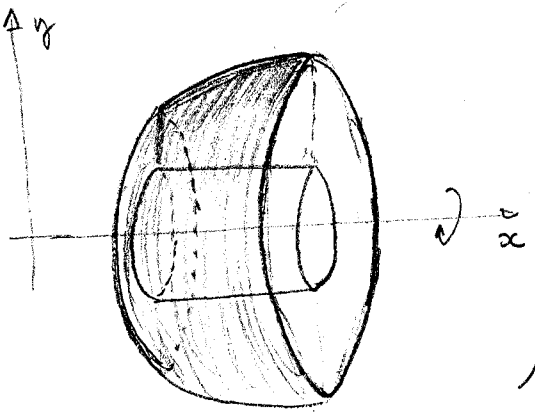


$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$ é ponto de mínimo da função área.

Os vértices do triângulo de menor área são $O = (0,0)$, $H_{p_0} = \left(0, \frac{8}{5}\right)$ e $B_{p_0} = \left(\frac{10^{3/4}}{5}, 0 \right)$.

Questão 2. (2,5) Determine o volume do sólido obtido pela rotação do conjunto A em torno do eixo Ox, sendo

$$A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \text{ e } 1 \le y \le \sqrt{\ln(3x+x^2)}\,\}$$



Sabemos que o volume do sólido é dado por

$$V = \int_1^2 A(x)\,dx,$$

sendo $A(x)$ a área da secção transversal em x, a saber,

$$A(x) = \pi\,[R(x)]^2 - \pi\,[r(x)]^2.$$

Neste caso, $R(x) = \sqrt{\ln(3x+x^2)}$ e $r(x) = 1$ (constante).

Logo, $V = \displaystyle\int_1^2 \pi\,[\ln(3x+x^2) - 1]\,dx.$

$$\int \ln(3x+x^2)\,dx = x\ln(3x+x^2) - \int x\cdot\frac{3+2x}{3x+x^2}\,dx$$

$$\left(\begin{array}{ll} u = \ln(3x+x^2) & \longrightarrow du = \dfrac{3+2x}{3x+x^2}\,dx \\ dv = dx & \longrightarrow v = x \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \int \ln(3x+x^2)\,dx = x\ln(3x+x^2) - \int \frac{3+2x}{3+x}\,dx =$$

$$= x\ln(3x+x^2) - \int \left[2 - \frac{3}{3+x}\right] dx =$$

$$= x\ln(3x+x^2) - 2x + 3\ln|3+x| + c$$

Portanto, $V = \pi \displaystyle\int_1^2 \ln(3x+x^2)\,dx - \pi\cdot\int_1^2 1\,dx =$

$$= \pi\left[x\ln(3x+x^2) - 2x + 3\ln(3+x)\right]\Big|_1^2 - \pi$$

$$V = \pi\left[2\ln 10 - 4 + 3\ln 5 - \ln 4 + 2 - 3\ln 4\right] - \pi.$$

Questão 3. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) (1.0) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt[5]{3+\mathrm{e}^{4x}}}\,\mathrm{d}x$ (b) (1.5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-9x^2}}\,\mathrm{d}x$

(a) Fazendo $s = 3+\mathrm{e}^{4x}$ e $\mathrm{d}s = 4\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$, temos a seguinte integral:

$$\int \frac{1}{4\sqrt[5]{s}}\,\mathrm{d}s = \int \frac{s^{-1/5}}{4}\,\mathrm{d}s = \frac{s^{\frac{-1}{5}+1}}{4\,(\frac{-1}{5}+1)} + k_1 = \frac{5\,s^{4/5}}{16} + k_1 = \frac{5\sqrt[5]{s^4}}{16} + k_1\,,$$

com $k_1 \in \mathbb{R}$. Logo

$$\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt[5]{3+\mathrm{e}^{4x}}}\,\mathrm{d}x = \frac{5\sqrt[5]{(3+\mathrm{e}^{4x})^4}}{16} + k\,,\ \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

(b) Notemos que $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-9x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{4\sqrt{1-\left(\frac{3x}{4}\right)^2}}\,\mathrm{d}x.$

Fazendo $x = \dfrac{4\mathrm{sen}\,\mathrm{s}}{3}$ e $\mathrm{d}x = \dfrac{4\cos\,s}{3}\,\mathrm{d}s$ com $-\pi/2 < s < \pi/2$ obtemos a seguinte integral:

$$\int \frac{16\mathrm{sen}^2 s\,4\cos\,s}{36\left(\sqrt{1-(\mathrm{sen}\,s)^2}\right)3}\mathrm{d}s = \int \frac{16\mathrm{sen}^2 s\,\cos\,s}{27\,|\cos\,s|}\mathrm{d}s = \int \frac{16\mathrm{sen}^2 s}{27}\mathrm{d}s = \int \frac{16}{27}\left(\frac{1-\cos(2s)}{2}\right)\,\mathrm{ds}$$

$$= \frac{8}{27}\left(s - \frac{\mathrm{sen}(2s)}{2}\right) + k_1 = \frac{8}{27}\,(s - \mathrm{sen}\,s\,\cos\,s) + k_1 = \frac{8}{27}\Big(s - \mathrm{sen}\,s\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 s}\Big) + k_1\,,$$

sendo $k_1 \in \mathbb{R}$. Note que $|\cos\,s| = \cos\,s = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 s}$ pois em $]-\pi/2, \pi/2[$ temos que a função cosseno é positiva. Logo

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-9x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{27}\left(\arcsen\left(\frac{3x}{4}\right) - \frac{3x}{4}\sqrt{1-\left(\frac{3x}{4}\right)^2}\right) + k_2 =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\arcsen\left(\frac{3x}{4}\right) - \frac{3x}{16}\sqrt{16-9x^2}\right) + k_2\,,\ \text{com } k_2 \in \mathbb{R}.\ \text{Assim}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-9x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{27}\arcsen\left(\frac{3x}{4}\right) - \frac{x}{18}\sqrt{16-9x^2} + k\,,\ \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

Questão 4. Seja

$$f(x) = \text{arctg}(x) - \frac{3x}{1+x^2} \ , \ x \in I\!R \, .$$

Quantas soluções reais tem a equação $f(x) = 0$? Justifique sua resposta.

Notemos que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 3\,\frac{1+x^2-x2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-3+3x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^2-2}{(1+x^2)^2} \, .$$

Portanto o sinal de f' é o sinal de $4x^2-2$(pois o denominador é sempre estritamente maior do que 0), e assim temos:

$f' > 0$ em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$; $f' > 0$ em $\left]\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$;

$f' < 0$ em $\left]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[$.

Logo, usando que f é contínua em $I\!R$, temos:

f é estritamente crescente em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\ \right]$; f é estritamente decrescente em $\left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\ \right]$;

f é estritamente crescente em $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.

Usando que f é estritamente decrescente em $\left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\ \right]$ e que $f(0) = \text{arctg}(0) - 0 = 0$ temos:

$f < 0$ em $\left]0, \sqrt{\frac{1}{2}}\ \right]$ e $f > 0$ em $\left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right[$.

De f ser contínua em $\left[\ \sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, estritamente crescente nesse intervalo, $f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) < 0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\text{arctg}(x) - \frac{3}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0,$$

podemos concluir que f se anula(Teorema do Anulamento ou Teorema do Valor Intermediário) uma única vez em $\left]\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.

De f ser contínua em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\ \right]$, estritamente crescente nesse intervalo, $f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) > 0$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\text{arctg}(x) - \frac{3}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \frac{-\pi}{2} - 0 = \frac{-\pi}{2} < 0,$$

podemos concluir que f se anula(Teorema do Anulamento ou Teorema do Valor Intermediário) uma única vez em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$. Dessa forma obtemos que a equação $f(x) = 0$ tem três soluções reais.

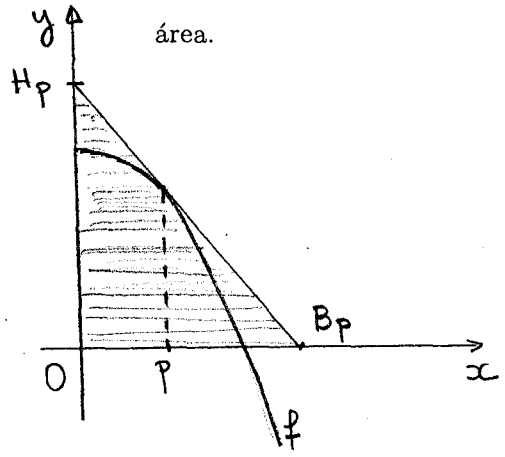
Gabarito da Prova Substitutiva
MAT-2453 - Tipo B

29 de Junho de 2011

Questão 1. Seja $f(x) = 1 - 3x^4$, definida para $x > 0$.

(a) (1,0) Para cada $p > 0$, determine a área do triângulo delimitado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ e pelos eixos Ox e Oy.

(b) (1,5) Dentre os triângulos obtidos como em (a), determine os vértices daquele que tem a menor área.



(a) $f'(x) = -12x^3$

Reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$:

$$y - (1-3p^4) = -12p^3(x-p) \iff$$

$$y = -12p^3 x + (9p^4+1)$$

Sejam H_p e B_p as interseções da reta tangente ao gráfico em $(p, f(p))$ e os eixos Oy e Ox respetivamente. Então:

$$H_p = (0,\ 9p^4+1) \quad \text{e} \quad B_p = \left(\frac{9p^4+1}{12p^3},\ 0\right)$$

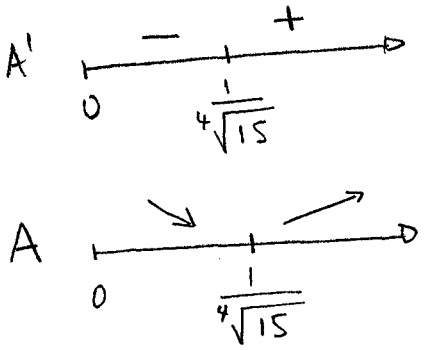
A área do triângulo $O H_p B_p$ é dada por

$$A(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9p^4+1}{12p^3} \cdot (9p^4+1) = \frac{1}{24}(9p^4+1)^2 p^{-3}.$$

(b) $$A'(p) = \frac{1}{24} 2(9p^4+1) \cdot 36p^3 \cdot p^{-3} + \frac{1}{24}(9p^4+1)^2 \cdot (-3) p^{-4}$$

$$= \frac{1}{24}(9p^4+1)\left[72 - 3p^{-4}(9p^4+1)\right] = \underbrace{\frac{1}{24}(9p^4+1)}_{>0}\left(45 - \frac{3}{p^4}\right)$$

$$A'(p) = 0 \iff p^4 = \frac{1}{15} \iff (p>0)\ p = \frac{1}{\sqrt[4]{15}}$$



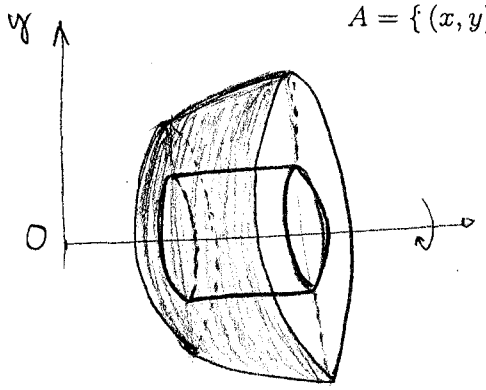
$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{15}}$ é ponto de mínimo da função Área

Os vértices do triângulo de menor área são $O = (0,0)$,

$$H_{p_0} = \left(0,\ \frac{8}{5}\right) \quad \text{e} \quad B_{p_0} = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{15}},\ 0\right)$$

Questão 2. (2,5) Determine o volume do sólido obtido pela rotação do conjunto A em torno do eixo Ox, sendo

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 1 \leq y \leq \sqrt{\ln(5x+x^2)} \}$$



Sabemos que o volume do sólido é dado por

$$V = \int_1^2 A(x)\,dx,$$

sendo $A(x)$ a área da secção transversal em x, a saber, $A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2$.

Neste caso, $R(x) = \sqrt{\ln(5x+x^2)}$ e $r(x) = 1$ (constante).

Logo, $V = \int_1^2 \left[\pi \ln(5x+x^2) - \pi\right] dx$

$$\int \ln(5x+x^2)\,dx = x\ln(5x+x^2) - \int x \cdot \frac{5+2x}{5x+x^2}\,dx =$$

$$\left(u = \ln(5x+x^2) \longrightarrow du = \frac{5+2x}{5x+x^2}\,dx \right.$$
$$\left. dv = dx \longrightarrow v = x \right)$$

$$= x\ln(5x+x^2) - \int \frac{5+2x}{5+x}\,dx = x\ln(5x+x^2) - \int \left[2 - \frac{5}{5+x}\right] dx$$

$$= x\ln(5x+x^2) - 2x + 5\ln|5+x| + c.$$

Portanto, $V = \pi \int_1^2 (\ln(5x+x^2) - 1)\,dx =$

$$= \pi \left[x\ln(5x+x^2) - 2x + 5\ln(5+x) - x \right]_1^2$$

$$\Leftrightarrow V = \pi\left[2\ln 14 - 4 + 5\ln 7 - 2 - \ln 6 + 2 - 5\ln 6 - 1\right]$$

Questão 3. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) (1.0) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{5x}}{\sqrt[7]{2+\mathrm{e}^{5x}}}\,\mathrm{d}x$ (b) (1.5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{25-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

(a) Fazendo $s = 2+\mathrm{e}^{5x}$ e $\mathrm{d}s = 5\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x$, temos a seguinte integral:

$$\int \frac{1}{5\sqrt[7]{s}}\,\mathrm{d}s = \int \frac{s^{-1/7}}{5}\,\mathrm{d}s = \frac{s^{\frac{-1}{7}+1}}{5\,(\frac{-1}{7}+1)} + k_1 = \frac{7\,s^{6/7}}{30} + k_1 = \frac{7\sqrt[7]{s^6}}{30} + k_1\,,$$

com $k_1 \in \mathbb{R}$. Logo

$$\int \frac{\mathrm{e}^{5x}}{\sqrt[7]{2+\mathrm{e}^{5x}}}\,\mathrm{d}x = \frac{7\sqrt[7]{(2+\mathrm{e}^{5x})^6}}{30} + k\,,\ \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

(b) Notemos que $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{25-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{5\sqrt{1-\left(\frac{2x}{5}\right)^2}}\,\mathrm{d}x.$

Fazendo $x = \dfrac{5\mathrm{sen}\,\mathrm{s}}{2}$ e $\mathrm{d}x = \dfrac{5\cos\,s}{2}\,\mathrm{d}s$ com $-\pi/2 < s < \pi/2$ obtemos a seguinte integral:

$$\int \frac{25\mathrm{sen}^2 s\,5\cos\,s}{40\,\sqrt{1-(\mathrm{sen}\,s)^2}}\mathrm{d}s = \int \frac{25\mathrm{sen}^2 s\,\cos\,s}{8\,|\cos\,s|}\mathrm{d}s = \int \frac{25\mathrm{sen}^2 s}{8}\mathrm{d}s = \int \frac{25}{8}\left(\frac{1-\cos(2s)}{2}\right)\,\mathrm{ds}$$

$$= \frac{25}{16}\left(s - \frac{\mathrm{sen}(2s)}{2}\right) + k_1 = \frac{25}{16}\,(s - \mathrm{sen}\,s\,\cos\,s) + k_1 = \frac{25}{16}\Big(s - \mathrm{sen}\,s\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 s}\Big) + k_1\,,$$

sendo $k_1 \in \mathbb{R}$. Note que $|\cos\,s| = \cos\,s = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 s}$ pois em $]-\pi/2, \pi/2[$ temos que a função cosseno é positiva. Logo

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{25-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{25}{16}\left(\mathrm{arcsen}\left(\frac{2x}{5}\right) - \frac{2x}{5}\sqrt{1-\left(\frac{2x}{5}\right)^2}\right) + k_2\ =$$

$$= \frac{25}{16}\left(\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{2x}{5}\right) - \frac{2x}{25}\sqrt{25-4x^2}\,\right) + k_2\,,\ \text{com } k_2 \in \mathbb{R}.\ \text{Assim}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{25-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{25}{16}\mathrm{arcsen}\left(\frac{2x}{5}\right) - \frac{x}{8}\sqrt{25-4x^2} + k\,,\ \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

Questão 4. Seja

$$f(x) = \text{arctg}(x) - \frac{2x}{1+x^2} \ , \ x \in I\!R \, .$$

Quantas soluções reais tem a equação $f(x) = 0$? Justifique sua resposta.

Notemos que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2\,\frac{1+x^2 - x2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^2} \, .$$

Portanto o sinal de f' é o sinal de $3x^2 - 1$(pois o denominador é sempre estritamente maior do que 0), e assim temos:

$f' > 0$ em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right[$; $f' > 0$ em $\left]\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right[$;

$f' < 0$ em $\left]-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right[$.

Logo, usando que f é contínua em $I\!R$, temos:

f é estritamente crescente em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\ \right]$; f é estritamente decrescente em $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\ \right]$;

f é estritamente crescente em $\left[\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right[$.

Usando que f é estritamente decrescente em $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\ \right]$ e que $f(0) = \text{arctg}(0) - 0 = 0$ temos:

$f < 0$ em $\left]0, \sqrt{\frac{1}{3}}\ \right]$ e $f > 0$ em $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right[$.

De f ser contínua em $\left[\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right[$, estritamente crescente nesse intervalo, $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\text{arctg}(x) - \frac{2}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0,$$

podemos concluir que f se anula(Teorema do Anulamento ou Teorema do Valor Intermediário) uma única vez em $\left]\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right[$.

De f ser contínua em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\ \right]$, estritamente crescente nesse intervalo, $f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) > 0$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\text{arctg}(x) - \frac{2}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \frac{-\pi}{2} - 0 = \frac{-\pi}{2} < 0,$$

podemos concluir que f se anula(Teorema do Anulamento ou Teorema do Valor Intermediário) uma única vez em $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right[$. Dessa forma obtemos que a equação $f(x) = 0$ tem três soluções reais.