Escola Politécnica da USP - 2010

MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

Prova Substitutiva - 29/06/2010

A e B

Turma: _____

Nome: _____

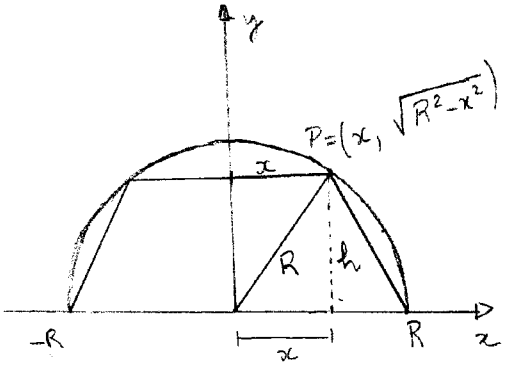
Nº USP: _____

Professor: _____

Justifique todas as suas afirmações.

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Questão 1. (2,0) Dentre todos os possíveis trapézios que podem ser inscritos em um semicírculo de raio R de modo que a base maior do trapézio coincida com o diâmetro do semicírculo, qual o de maior área?



Consideremos, num sistema cartesiano, a circunferência de equação $x^2+y^2=R^2$. $y=\sqrt{R^2-x^2}$ é a ordenada do ponto P indicado na figura e, portanto, a altura do trapézio de base maior $2R$ e base menor $2x$, conforme a figura.

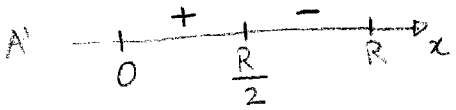
A área de tal trapézio é dada pela função

$$A(x) = \frac{2R+2x}{2}\cdot\sqrt{R^2-x^2} = (R+x)\sqrt{R^2-x^2}, \quad (0\le x\le R)$$

A é uma função contínua, definida em um intervalo fechado. Logo, pelo Teorema de Weierstrass, admite um máximo.

$$A'(x) = \sqrt{R^2-x^2} + (R+x)\frac{(-x)}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{-2x^2-Rx+R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Como o denominador é positivo para $x\neq R$, basta analisar o sinal do numerador.



Logo, $x=\frac{R}{2}$ é ponto de máximo de A.

O trapézio de área máxima tem base menor igual a $2\cdot\frac{R}{2}=R$ e altura $R\sqrt{3}$.

Escola Politécnica da USP - 2010

MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

Prova Substitutiva - 29/06/2010

A e B

Turma: _____

Nome: _____

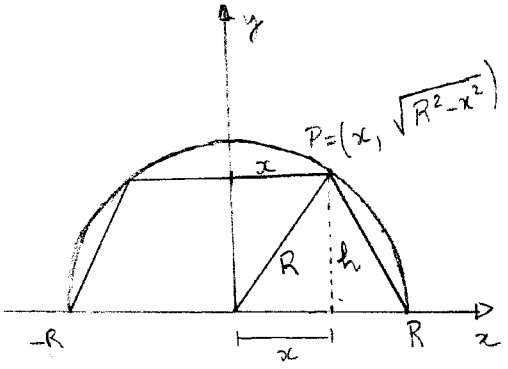
Nº USP: _____

Professor: _____

Justifique todas as suas afirmações.

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Questão 1. (2,0) Dentre todos os possíveis trapézios que podem ser inscritos em um semicírculo de raio R de modo que a base maior do trapézio coincida com o diâmetro do semicírculo, qual o de maior área?



Consideremos, num sistema cartesiano, a circunferência de equação $x^2+y^2=R^2$. $y=\sqrt{R^2-x^2}$ é a ordenada do ponto P indicado na figura e, portanto, a altura do trapézio de base maior $2R$ e base menor $2x$, conforme a figura.

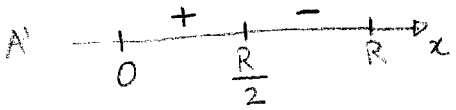
A área de tal trapézio é dada pela função

$$A(x) = \frac{2R+2x}{2}\cdot\sqrt{R^2-x^2} = (R+x)\sqrt{R^2-x^2}, \quad (0\le x\le R)$$

A é uma função contínua, definida em um intervalo fechado. Logo, pelo Teorema de Weierstrass, admite um máximo.

$$A'(x) = \sqrt{R^2-x^2} + (R+x)\frac{(-x)}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{-2x^2-Rx+R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Como o denominador é positivo para $x\neq R$, basta analisar o sinal do numerador.



Logo, $x=\frac{R}{2}$ é ponto de máximo de A.

O trapézio de área máxima tem base menor igual a $2\cdot\frac{R}{2}=R$ e altura $R\sqrt{3}$.

Questão 2. (3,0)

Considere a função $f(x) = xe^{-5x}, x \in \mathbb{R}$.

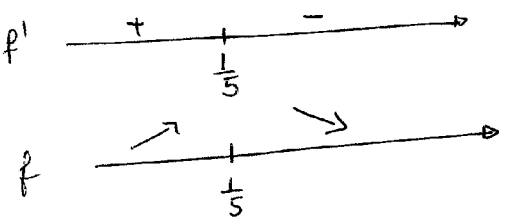
(a) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento.

(b) Determine a concavidade.

(c) Calcule os limites necessários e esboce o gráfico.

(d) Qual o número de soluções da equação $e^{5x} = 25x$? Justifique.

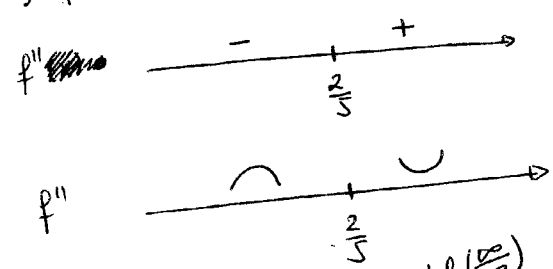
a) $f'(x) = (1-5x)\underbrace{e^{-5x}}_{>0}$



• f é crescente em $]-\infty, \frac{1}{5}[$ e decrescente em $]\frac{1}{5}, +\infty[$.

• $x = \frac{1}{5}$ é ponto de máximo e $f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5e}$ é o valor máximo de f.

b) $f''(x) = (25x-10)e^{-5x}$

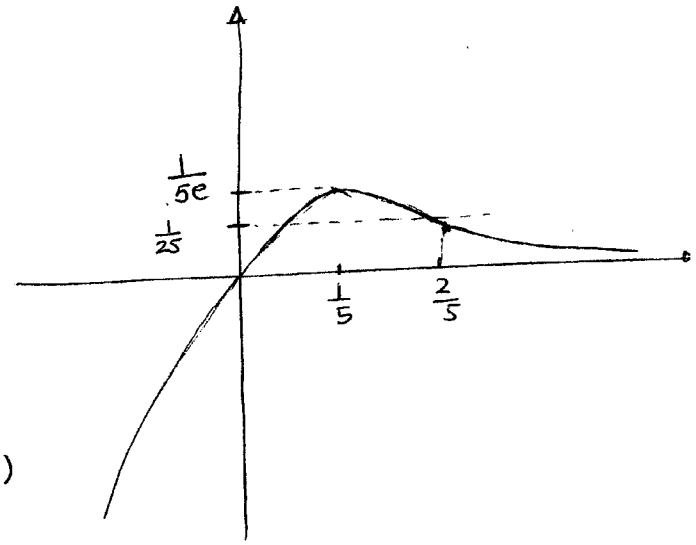


$x = \frac{2}{5}$ é ponto de inflexão.

$f(\frac{2}{5}) = \frac{2}{5}e^{-2} = \frac{2}{5e^2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{5x}} \overset{\text{L'Hopital}(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5e^{5x}} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{5x}} = -\infty.$



d) $e^{5x} = 25x \iff \frac{1}{25} = xe^{-5x} = f(x)$

f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular em $[0, \frac{1}{5}]$. $f(0)=0$ e $f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5e}$. Como $0 < \frac{1}{25} < \frac{1}{5e}$, $\frac{1}{25} \in \text{Im } f$. Como f é crescente em $[0, \frac{1}{5}]$, Há exatamente uma solução da equação no intervalo $[0, \frac{1}{5}]$. Além disso, f é (estritamente) decrescente em $[\frac{1}{5}; +\infty[$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Logo, há exatamente mais uma solução em $[\frac{1}{5}, +\infty[$.

(Conclusão: a equação tem exatamente 2 soluções.)

B

Questão 2. (3,0)

Considere a função $f(x) = xe^{-3x}, x \in \mathbb{R}$.

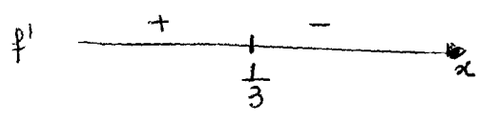
(a) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento.

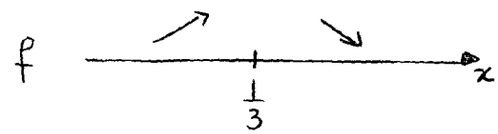
(b) Determine a concavidade.

(c) Calcule os limites necessários e esboce o gráfico.

(d) Qual o número de soluções da equação $e^{3x} = 3x$? Justifique.

a) $f'(x) = (1-3x)\underbrace{e^{-3x}}_{>0}$



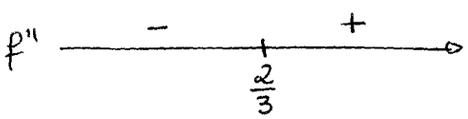


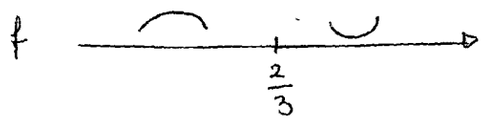
f é crescente em $]-\infty, \frac{1}{3}[$ e decrescente em $]\frac{1}{3}, +\infty[$.

$x = \frac{1}{3}$ é ponto de máximo de f

$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}e^{-1} = \frac{1}{3e}$ é o valor máximo de f.

b) $f''(x) = (9x-6)e^{-3x}$

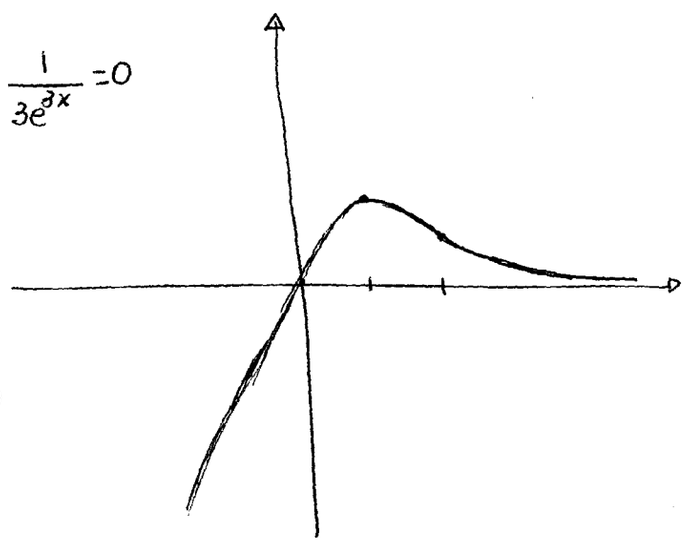




$x = \frac{2}{3}$ é ponto de inflexão.

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{3x}} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim \frac{1}{3e^{3x}} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{3x}} = -\infty$.



d) $e^{3x} = 3x \iff \frac{1}{3} = xe^{-3x} = f(x)$

Como $\frac{1}{3} > \frac{1}{3e} = f(\frac{1}{3})$,

vemos que $\frac{1}{3} \notin \text{Im } f =]-\infty, \frac{1}{3e}]$

Logo, a equação $e^{3x} = 3x$ não tem solução.

Questão 3. (2,5) A

(a) Seja $f(t) = \begin{cases} [1-\operatorname{sen}(3t)]^{\frac{1}{t}}, & \text{se } t \neq 0 \\ k, & \text{se } t = 0 \end{cases}$

(i) Sabendo que f é contínua, determine o valor de k.

(ii) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x+2}+2x}{3x-1}$

a) $(1-\operatorname{sen}3t)^{1/t} = e^{\frac{1}{t}\ln(1-\operatorname{sen}3t)}$

$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-\operatorname{sen}3t)}{t}$ ($\to 0$) $\overset{\text{L'HOP}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-3\cos 3t}{1-\operatorname{sen}3t} = -3$

Logo, $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\ln(1-\operatorname{sen}3t)} = e^{-3}$ (*)

(i) f é contínua em $t=0 \iff \lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$.

Logo, por (*), $\boxed{k = e^{-3}}$

(ii) Se $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, sabemos que F é derivável e $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (Teor. Fundamental do Cálculo). Como toda função derivável é contínua, F é contínua em $x=0$, ou seja, $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$.

Como $F(0)=0$, obtemos que $\lim_{x\to 0} \int_0^x f(t)\,dt = 0$ e podemos usar L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$ ($\to 0$) $\overset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} F'(x) =$

$= \lim_{x\to 0} f(x) \overset{(*)}{=} e^{-3}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+5/x+2/x^2)}+2x}{x(3-1/x)} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left[\sqrt{1+5/x+2/x^2}-2\right]}{x(3-1/x)}$ ($-x \to -1$; $3-1/x \to 3$)

$= \frac{1}{3}$

Questão 3. (2,5)

B

(a) Seja $f(t) = \begin{cases} [1-\operatorname{sen}(4t)]^{\frac{1}{t}}, & \text{se } t \neq 0 \\ k, & \text{se } t = 0 \end{cases}$

(i) Sabendo que f é contínua, determine o valor de k.

(ii) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+7x+3}+3x}{8x+5}$

a) $(1-\operatorname{sen}(4t))^{1/t} = e^{\frac{1}{t}\ln(1-\operatorname{sen}4t)}$

$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-\operatorname{sen}4t)}{t} \overset{\text{L'HOP.}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-4\cos(4t)}{1-\operatorname{sen}4t} = -4$

Logo, $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{t}\ln(1-\operatorname{sen}4t)} = e^{-4}$ (*)

(i) f é contínua em $t=0 \iff \lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$

Logo, por (*), $\boxed{k = e^{-4}}$

(ii) Dada $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, sabemos que F é derivável e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pelo Teor. Fundamental do Cálculo). Como toda função derivável é contínua, concluímos que F é contínua em $x=0$ e, portanto, $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$. Como $F(0)=0$, temos que $\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt = 0$ e podemos usar L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} \overset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} F'(x) =$

$= \lim_{x\to 0} f(x) \overset{(*)}{=} e^{-4}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+7/x+3/x^2)}+3x}{x(8+5/x)} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+7/x+3/x^2}-3\right)}{x(8+5/x)}$ (-2, 8)

$= \frac{1}{4}$

Questão 4. (2,5) Calcule:

(a) $\int_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$ (b) $\int \ln(x^2-2x+2)dx$

A

a) $x = 3\cos t \Rightarrow dx = -3\operatorname{sen} t\, dt$

$t \in [0, \pi]$

$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\cos^2 t} = 3|\operatorname{sen} t| = 3\operatorname{sen} t$

$x = 3/2 \Leftrightarrow \cos t = 1/2 \Leftrightarrow t = \pi/3$

$x = 3 \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow t = 0$

$$\int_{3/2}^{3} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\int_{\pi/3}^{0} \frac{9\operatorname{sen}^2 t}{9\cos^2 t} = \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 t\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/3} (\sec^2 t - 1)\, dt = \operatorname{tg} t \Big]_0^{\pi/3} - t \Big]_0^{\pi/3} = \underline{\sqrt{3} - \pi/3}$$

b) $\int 1 \cdot \ln(x^2-2x+2)\, dx = x\ln(x^2-2x+2) - \int \frac{2x^2-2x}{x^2-2x+2}dx$ (*

$f' \quad g$

$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$

$g(x) = \ln(x^2-2x+2) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$

$$\frac{2x^2-2x}{x^2-2x+2} = 2 + \frac{2x-4}{x^2-2x+2} = 2 + \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{1+(x-1)^2}$$

Logo, $\int \frac{2x^2-2x}{x^2-2x+2}dx = \int 2dx + \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx - \int \frac{2dx}{1+(x-1)^2} =$

$= 2x + \ln(x^2-2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x-1) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

Daí, (*) = $x\ln(x^2-2x+2) - 2x - \ln(x^2-2x+2) + 2\operatorname{arctg}(x-1) + k, \quad k \in \mathbb{R}$

Questão 4. (2,5) Calcule:

(a) $\int_{\frac{5}{2}}^{5} \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2} dx$ (b) $\int \ln(x^2+2x+2) dx$

B

a) $x = 5\cos t$, $t \in [0, \pi]$

$dx = -\operatorname{sen} t\, dt$

$x = 5 \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow t = 0$

$x = 5/2 \Leftrightarrow \cos t = 1/2 \Leftrightarrow t = \pi/3$

$$\int_{5/2}^{5} \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2} dx = -\int_{\pi/3}^{0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} dt = \int_{0}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 t\, dt =$$

$$\int_0^{\pi/3} (\sec^2 t - 1)\, dt = \operatorname{tg} t \Big]_0^{\pi/3} - t \Big]_0^{\pi/3} = \boxed{\sqrt{3} - \pi/3}$$

b) $\int 1 \cdot \ln(x^2+2x+2)\, dx = x \ln(x^2+2x+2) - \int \frac{2x^2+2x}{x^2+2x+2} dx \quad (*)$

($1 \to f'$, $\ln(x^2+2x+2) \to g$)

$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$

$g(x) = \ln(x^2+2x+2) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

$$\boxed{\frac{2x^2+2x}{x^2+2x+2} = 2 - \frac{2x+4}{x^2+2x+2} = 2 - \frac{(2x+2)}{x^2+2x+2} - \frac{2}{(x+1)^2+1}}$$

Logo,

$$\int \frac{2x^2+2x}{x^2+2x+2} dx = \int 2\, dx - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{2}{1+(x+1)^2} dx$$

$$= 2x - \ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + R, \quad R \in \mathbb{R}$$

Daí, $(*) = \boxed{x\ln(x^2+2x+2) - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\operatorname{arctg}(x+1) + R, \quad R \in \mathbb{R}}$