MAT 2453 - SUB

Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

30.06.2009

Resolução da Questão 3

Considere $g : [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\,] \to \mathbb{R}$ dada por $t \mapsto b\sin t$. Tal função é derivável e tem derivada contínua, dada por $g' : [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\,] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto b\cos t$. Além disso, $g(-\frac{\pi}{2}\,) = -b$ e $g(\frac{\pi}{2}\,) = b$. Portanto, segue-se do teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann que $\int_{-b}^{b} x^2\sqrt{b^2-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(t)^2\sqrt{b^2-g(t)^2}g'(t)\,dt = b^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{b^4}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{b^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt \overset{TFC}{=} \frac{b^4}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\,\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi b^4}{8}$.

MAT 2453 - SUB

Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

30.06.2009

Resolução da Questão 4

Dados $a, \alpha, \beta > 0$, seja $\mathrm{V} : (0, a) \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{(a-x)^\beta}$. Tal função é duas vezes derivável, sendo $\mathrm{V}', \mathrm{V}'' : (0, a) \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} + \frac{\beta}{(a-x)^{\beta+1}}$ e $x \mapsto \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}} + \frac{\beta(\beta+1)}{(a-x)^{\beta+2}}$. Portanto, V'' é estritamente positiva, donde, pelo teorema do valor médio, V' é estritamente crescente. Além disso, tomando-se $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto -\alpha(a - x)^{\beta+1} + \beta x^{\alpha+1}$, tem-se $\forall x \in (0, a)$, $\mathrm{V}'(x) = \frac{g(x)}{x^{\alpha+1}(a-x)^{\beta+1}}$. Como g é contínua, $g(0) = -\alpha a^{\beta+1} < 0$ e $g(a) = \beta a^{\beta+1} > 0$, segue-se do teorema do valor intermediário que existe $x_0 \in (0, a)$ tal que $g(x_0) = 0$, donde $\mathrm{V}'(x_0) = 0$. Assim, pelo fato de ser V' estritamente crescente, conclui-se que $\mathrm{V}' < 0$ em $(0, x_0)$ e $\mathrm{V}' > 0$ em (x_0, a), donde, novamente pelo teorema do valor médio, V é estritamente decrescente em $(0, x_0]$ e estritamente crescente em $[x_0, a)$. Portanto, x_0 é o único ponto de mínimo de V.

MAT 2453 - SUB

Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

30.06.2009

Resolução da Questão 4

Dados $a, \alpha, \beta > 0$, seja $\mathrm{V} : (0, a) \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{(a-x)^\beta}$. Tal função é duas vezes derivável, sendo $\mathrm{V}', \mathrm{V}'' : (0, a) \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} + \frac{\beta}{(a-x)^{\beta+1}}$ e $x \mapsto \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}} + \frac{\beta(\beta+1)}{(a-x)^{\beta+2}}$. Portanto, V'' é estritamente positiva, donde, pelo teorema do valor médio, V' é estritamente crescente. Além disso, tomando-se $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto -\alpha(a - x)^{\beta+1} + \beta x^{\alpha+1}$, tem-se $\forall x \in (0, a)$, $\mathrm{V}'(x) = \frac{g(x)}{x^{\alpha+1}(a-x)^{\beta+1}}$. Como g é contínua, $g(0) = -\alpha a^{\beta+1} < 0$ e $g(a) = \beta a^{\beta+1} > 0$, segue-se do teorema do valor intermediário que existe $x_0 \in (0, a)$ tal que $g(x_0) = 0$, donde $\mathrm{V}'(x_0) = 0$. Assim, pelo fato de ser V' estritamente crescente, conclui-se que $\mathrm{V}' < 0$ em $(0, x_0)$ e $\mathrm{V}' > 0$ em (x_0, a), donde, novamente pelo teorema do valor médio, V é estritamente decrescente em $(0, x_0]$ e estritamente crescente em $[x_0, a)$. Portanto, x_0 é o único ponto de mínimo de V.

MAT 2453 - Prova Substitutiva
Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I
30.06.2009

(A)

Nome:_____
No. USP:_____ RG:_____
Turma:_____ Professor:_____
Assinatura:_____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

1-) (4,0 pontos) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e $f(x) = x^2 \ln|2x|$ se $x \neq 0$.

(a) Mostre que f é derivável no zero e calcule $f'(0)$. Existe $f''(0)$?

(b) Analise o sinal de f' e de f''.

(c) Esboce o gráfico de f, levando-se em conta os intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e limites em $\pm\infty$. Indique os pontos críticos e os pontos de inflexão.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln|2x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|2x|}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

$f'(0)$

$f'(x) = 2x \ln|2x| + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\ln|2x| + 1), \quad x \neq 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} (2\ln|2x|+1) = -\infty$. Logo, $f''(0) \nexists$.

(b) $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\left(\ln|2x| = -\frac{1}{2} \iff 2x = \pm e^{-\frac{1}{2}} \iff x = \frac{\pm 1}{2\sqrt{e}}\right.$

$|2x| > e^{-\frac{1}{2}} \iff 2\ln|2x| + 1 > 0$

$f' < 0$ ↘ $-\frac{1}{2\sqrt{e}}$ $f' > 0$ ↗ 0 $f' < 0$ ↘ $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ $f' > 0$ ↗

$f''(x) = 2\ln|2x| + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln|2x| + 3 = 0 \iff x = \frac{\pm 1}{2e^{\frac{3}{2}}}$

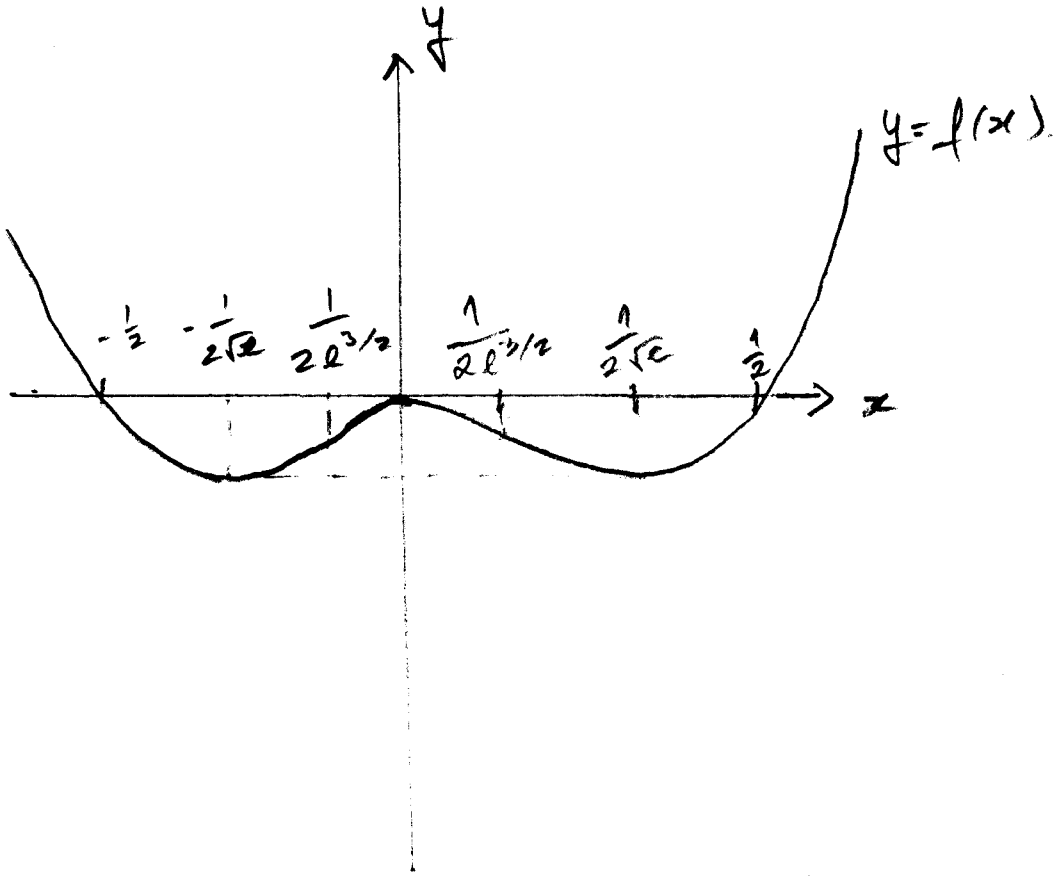
$f'' > 0$ ∪ $-\frac{1}{2e^{3/2}}$ $f'' < 0$ ∩ 0 $f'' < 0$ ∩ $\frac{1}{2e^{3/2}}$ $f'' > 0$ ∪

Pontos de mínimo local: $-\frac{1}{2\sqrt{e}}$ e $+\frac{1}{2\sqrt{e}}$

Ponto de máximo local: 0

Pontos de inflexão: $-\frac{1}{2e^{3/2}}$ e $+\frac{1}{2e^{3/2}}$

$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 \ln|2x| = +\infty$.



$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\left(|2x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\right)$

2-) (1,5 pontos) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, considere $g(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} f(t)\, dt$. Calcule $g'(0)$.

$$g'(x) = 2x e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} f(t)\,dt + e^{x^2} \cdot e^{-x^2} \cdot f(x)$$

$$g'(0) = 0 + f(0) = f(0).$$

MAT 2453 - Prova Substitutiva
Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I
30.06.2009

(B)

Nome:_____
No. USP:_____ RG:_____
Turma:_____ Professor:_____
Assinatura:_____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

1-) (4,0 pontos) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e $f(x) = x^2 \ln|3x|$ se $x \neq 0$.

(a) Mostre que f é derivável no zero e calcule $f'(0)$. Existe $f''(0)$?

(b) Analise o sinal de f' e de f''.

(c) Esboce o gráfico de f, levando-se em conta os intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e limites em $\pm\infty$. Indique os pontos críticos e os pontos de inflexão.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln|3x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|3x|}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

$\| \quad \frac{\infty}{\infty}$

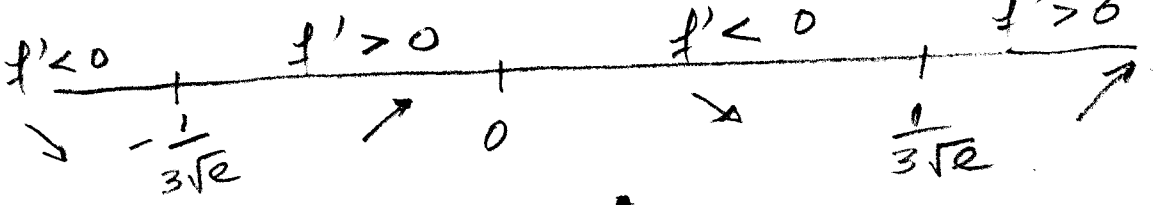
$f'(0)$

$f'(x) = 2x \ln|3x| + x^2 \frac{1}{x} = x(2\ln|3x| + 1), \quad x \neq 0$

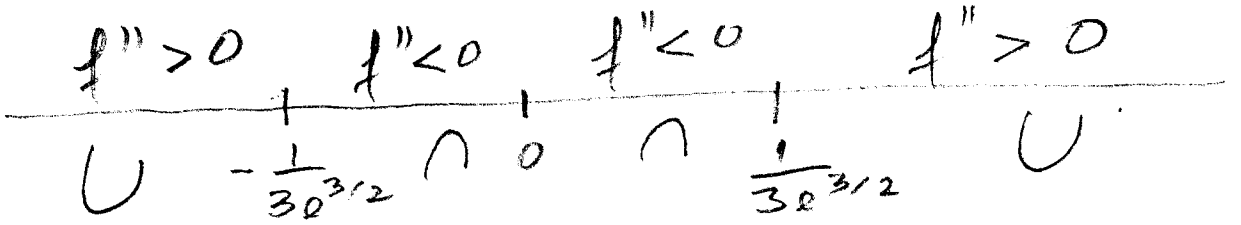
$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} (2\ln|3x|+1) = -\infty$. Logo, $f''(0) \nexists$.

(b) $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\left(\ln|3x| = -\frac{1}{2} \iff 3x = \pm e^{-\frac{1}{2}} \iff x = \frac{\pm 1}{3\sqrt{e}}\right)$

$|3x| > e^{-\frac{1}{2}} \iff 2\ln|3x| + 1 > 0.$



$f''(x) = 2\ln|3x| + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln|3x| + 3 = 0 \iff x = \frac{\pm 1}{3e^{3/2}}$



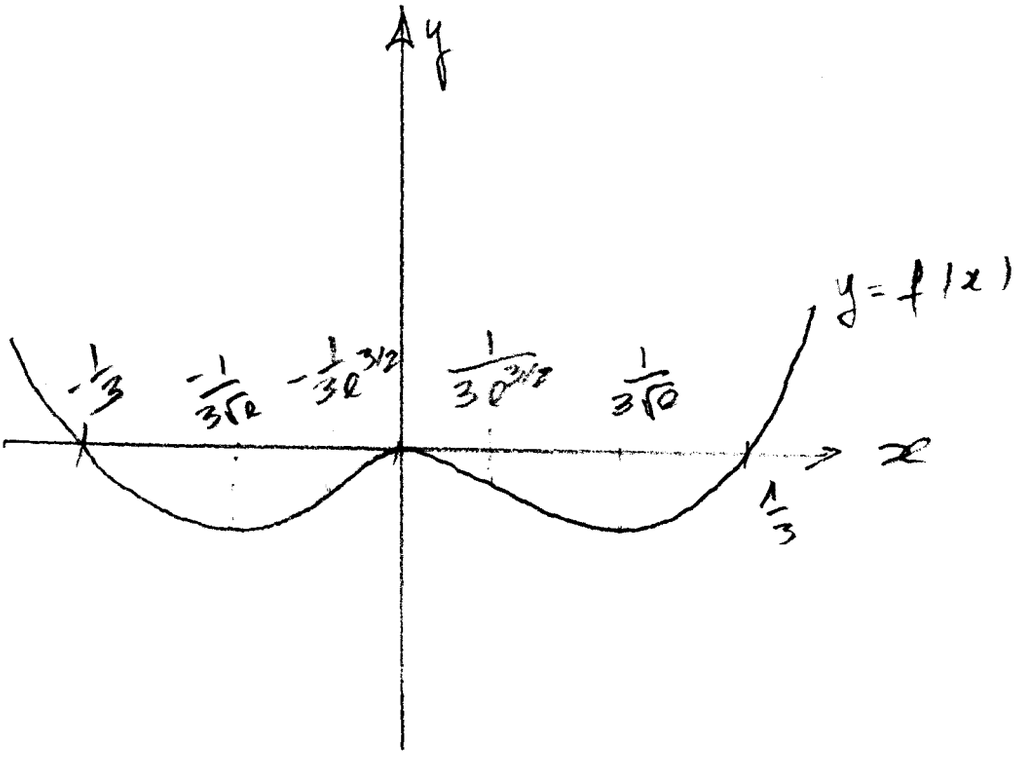
Pontos de mínimo local: $-\frac{1}{3\sqrt{e}}$ e $+\frac{1}{3\sqrt{e}}$

Ponto de máximo local: 0.

Pontos de inflexão: $-\frac{1}{3e^{3/2}}$ e $+\frac{1}{3e^{3/2}}$

$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 \ln|3x| = +\infty$.

$f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $(|3x| = 1 \iff x = \pm\frac{1}{3})$



2-) (1,5 pontos) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, considere $g(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} f(t)\, dt$. Calcule $g'(0)$.

$$g'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} f(t)\, dt + e^{-x^2} e^{x^2} f(x)$$

$$g'(0) = 0 + f(0) = f(0)$$

MAT 2453 - SUB

Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

30.06.2009

Resolução da Questão 3

Considere $g : [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\,] \to \mathbb{R}$ dada por $t \mapsto a\sin t$. Tal função é derivável e tem derivada contínua, dada por $g' : [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\,] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto a\cos t$. Além disso, $g(-\frac{\pi}{2}\,) = -a$ e $g(\frac{\pi}{2}\,) = a$. Portanto, segue-se do teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann que $\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(t)^2\sqrt{a^2-g(t)^2}g'(t)\,dt = a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{a^4}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt \overset{TFC}{=} \frac{a^4}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{8}$.