Questão 2-A. (3,0 pontos) Calcule

a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{6}\int \frac{u-1}{u}du =$

$\boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg}(x) & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{array}}$ $\qquad$ $\boxed{u = 1 + x^2 \quad du = 2xdx}$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{6}[u - \ln|u|] + k = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1+x^2}{6} + \frac{\ln(1+x^2)}{6} + k.$$

b) $\displaystyle\int \frac{5e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 1}\, dx = \int \frac{5u-1}{u^2-1}\, du = \int \frac{5u-1}{(u+1)(u-1)}\, du = \int \left[\frac{A}{(u+1)} + \frac{B}{(u-1)}\right] du =$

$\boxed{u = e^x \quad du = e^x dx}$ $\qquad$ $\boxed{A = 3 \quad B = 2}$

$$= \int \left[\frac{3}{(u+1)} + \frac{2}{(u-1)}\right] du = 3\ln|u+1| + 2\ln|u-1| + k = 3\ln|e^x+1| + 2\ln|e^x-1| + k.$$

c) $\displaystyle\int x(\ln x)^2\, dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}dx =$

$\boxed{\begin{array}{ll} u = (\ln x)^2 & du = \frac{2\ln x}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}}$ $\qquad$ $\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}}$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + k.$$

Questão 2-B. (3,0 pontos) Calcule

a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{6}\int \frac{u-1}{u}du =$

$\boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg}(x) & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{array}}$ $\qquad$ $\boxed{u = 1 + x^2 \quad du = 2xdx}$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{6}[u - \ln|u|] + k = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1+x^2}{6} + \frac{\ln(1+x^2)}{6} + k.$$

b) $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}+e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{5u+1}{u^2-1}\,du = \int \frac{5u+1}{(u+1)(u-1)}\,du = \int \left[\frac{A}{(u+1)} + \frac{B}{(u-1)}\right] du =$

$\boxed{u = e^x \quad du = e^x dx}$ $\qquad$ $\boxed{A = 2 \quad B = 3}$

$$= \int \left[\frac{2}{(u+1)} + \frac{3}{(u-1)}\right] du = 2\ln|u+1| + 3\ln|u-1| + k = 2\ln|e^x+1| + 3\ln|e^x-1| + k.$$

c) $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}dx =$

$\boxed{\begin{array}{ll} u = (\ln x)^2 & du = \frac{2\ln x}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}}$ $\qquad$ $\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}}$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + k.$$

Questão 3-A. A região R está contida no primeiro quadrante e é limitada pela curva

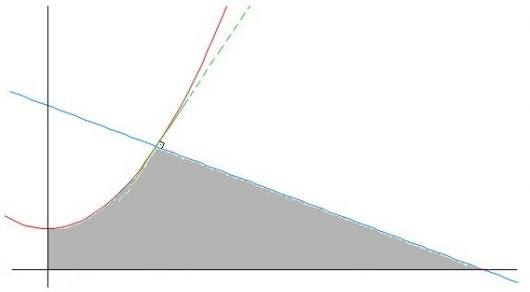
$$y = 1 + \frac{x^2}{2}$$

e pela reta normal a essa curva no ponto $(2, 3)$.

a) (2,0 pontos) Calcule o perímetro de R.

b) (1,5 pontos) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo Ox.

Solução. Sejam $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$, $O = (0, 0)$, $B = (2, 3)$ e $C = (0, 1)$. A reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto $(2, 3)$ tem equação $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ e, portanto, o ponto em que a normal corta o eixo Ox é $A = (8, 0)$.



a) O perímetro de R é dado por

$$\begin{aligned} p &= \overline{OC} + \overline{OA} + \overline{AB} + \text{ arco } CB \\ &= 1 + 8 + 3\sqrt{5} + \int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Para calcular a ultima integral, usamos a mudança de variável $x = \operatorname{tg}\theta$ e depois integramos por partes:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + x^2}\, dx &= \int \sec^3\theta\, dx = \int \sec\theta(1 + \operatorname{tg}^2\theta)\, d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \int \operatorname{tg}\theta\ \operatorname{tg}\theta\sec\theta\, d\theta \\ &= \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \operatorname{tg}\theta\sec\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \operatorname{tg}\theta\sec\theta\right]$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} p &= 1 + 8 + 3\sqrt{5} + \int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx \\ &= 9 + 3\sqrt{5} + \frac{1}{2}\left[\ln|x + \sqrt{1 + x^2}| + x\sqrt{1 + x^2}\right]_0^2 \\ &= 9 + 3\sqrt{5} + \frac{1}{2}[\ln(2 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{5}] \\ &= 9 + 4\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

b) O volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo Ox é

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 (1 + \frac{x^2}{2})^2 \, dx + \pi \int_2^8 (-\frac{x}{2} + 4)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^2 (1 + x^2 + \frac{x^4}{4}) \, dx + \pi \int_2^8 (16 - 4x + \frac{x^2}{4}) \, dx \\
&= \pi \, (x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20}) \Big|_0^2 + \pi \, (16x - 2x^2 + \frac{x^3}{12}) \Big|_2^8 \\
&= \pi \left[2 + \frac{8}{3} + \frac{8}{5} + 128 - 128 + \frac{128}{3} - 32 + 8 - \frac{2}{3} \right] \\
&= \frac{364\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

Questão 3-B. A região R está contida no primeiro quadrante e é limitada pela curva

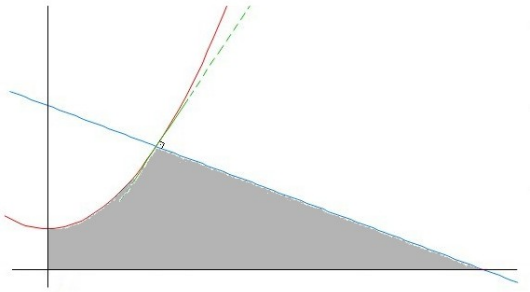
$$y = 2 + \frac{x^2}{2}$$

e pela reta normal a essa curva no ponto $(2, 4)$.

a) (2,0 pontos) Calcule o perímetro de R.

b) (1,5 pontos) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo Ox.

Solução. Sejam $f(x) = 2 + \frac{x^2}{2}$, $O = (0, 0)$, $B = (2, 3)$ e $C = (0, 2)$. A reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto $(2, 3)$ tem equação $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ e, portanto, o ponto em que a normal corta o eixo Ox é $A = (10, 0)$.



a) O perímetro de R é dado por

$$\begin{aligned} p &= \overline{OC} + \overline{OA} + \overline{AB} + \text{ arco } CB \\ &= 2 + 10 + 4\sqrt{5} + \int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Para calcular a ultima integral, usamos a mudança de variável $x = \operatorname{tg}\theta$ e depois integramos por partes:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + x^2}\, dx &= \int \sec^3\theta\, dx = \int \sec\theta(1 + \operatorname{tg}^2\theta)\, d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \int \operatorname{tg}\theta\ \operatorname{tg}\theta\sec\theta\, d\theta \\ &= \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \operatorname{tg}\theta\sec\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + \operatorname{tg}\theta\sec\theta\right]$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} p &= 2 + 10 + 4\sqrt{5} + \int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx \\ &= 12 + 4\sqrt{5} + \frac{1}{2}\left[\ln|x + \sqrt{1 + x^2}| + x\sqrt{1 + x^2}\right]_0^2 \\ &= 12 + 4\sqrt{5} + \frac{1}{2}[\ln(2 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{5}] \\ &= 12 + 5\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

b) O volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo Ox é

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 (2 + \frac{x^2}{2})^2 \, dx + \pi \int_2^{10} (-\frac{x}{2} + 5)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^2 (4 + 2x^2 + \frac{x^4}{4}) \, dx + \pi \int_2^8 (25 - 5x + \frac{x^2}{4}) \, dx \\
&= \pi \, (4x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20}) \Big|_0^2 + \pi \, (25x - \frac{5x^2}{2} + \frac{x^3}{12}) \Big|_2^{10} \\
&= \pi \left[8 + \frac{16}{3} + \frac{8}{5} + 250 - 250 + \frac{1000}{12} - 50 + 10 - \frac{2}{3} \right] \\
&= \frac{288\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Questão 1-A. a) (2,0 pontos) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = 3x^{2/3} + \frac{5}{x^{1/3}},$$

indicando domínio, intervalos de crescimento e de decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, assíntotas, etc.

b) (1,5 pontos) Um triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{3}$ gira em torno de um de seus catetos gerando um cone. Determine o raio da base, a altura e o volume do cone de maior volume que pode ser gerado dessa maneira.

Solução: a) Domínio de $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Intervalos de crescimento e decrescimento:

$$f'(x) = 2x^{-1/3} - \frac{5}{3}x^{-4/3} = \frac{6x-5}{3x^{4/3}}.$$

Assim, f é crescente em $[\frac{5}{6}, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$ e $]0, \frac{5}{6}]$. Vemos então que $x = \frac{5}{6}$ é ponto de mínimo local.

Concavidade:

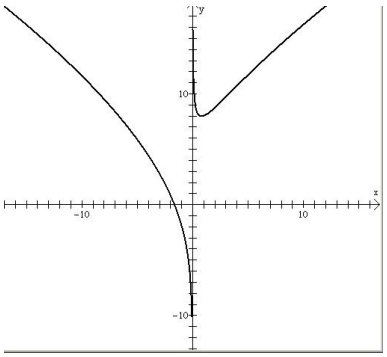
$$f''(x) = \frac{18x^{4/3} - 4x^{1/3}(6x-5)}{9x^{8/3}} = \frac{x^{1/3}(20-6x)}{9x^{8/3}} = \frac{(20-6x)}{9x^{7/3}}.$$

Logo, f tem concavidade para cima em $]0, \frac{10}{3}]$ e para baixo em $]-\infty, 0[$ e $]\frac{10}{3}, +\infty[$. Assim, $x = \frac{10}{3}$ é ponto de inflexão.

Limites: Os limites necessários são calculados diretamente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Assíntotas: f possui assíntota vertical, a reta $x = 0$. f não possui assíntota horizontal, pois $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e nem assíntota inclinada, pois $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.



b) O volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi h r^2$, onde h e r são os catetos do triângulo. Como $r^2 = 3 - h^2$ segue que $V(h) = \frac{1}{3}\pi h(3-h^2)$, com $h \in]0, \sqrt{3}[$. Temos que $V'(h) = \frac{\pi}{3}(3-3h^2)$ e portanto V cresce em $]0, 1]$ e decresce em $[1, \sqrt{3}]$. Então o volume máximo ocorre quando $h = 1$. Neste caso, $r = \sqrt{2}$ e $V = \frac{2\pi}{3}$.

Questão 1-B. a) (2,0 pontos) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = 5x^{2/3} + \frac{3}{x^{1/3}},$$

indicando domínio, intervalos de crescimento e de decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, assíntotas, etc.

b) (1,5 pontos) Um triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{5}$ gira em torno de um de seus catetos gerando um cone. Determine o raio da base, a altura e o volume do cone de maior volume que pode ser gerado dessa maneira.

Solução: a) Domínio de $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Intervalos de crescimento e decrescimento:

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3} - x^{-4/3} = \frac{10x - 3}{3x^{4/3}}.$$

Assim, f é crescente em $[\frac{3}{10}, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$ e $]0, \frac{3}{10}]$. Vemos então que $x = \frac{3}{10}$ é ponto de mínimo local.

Concavidade:

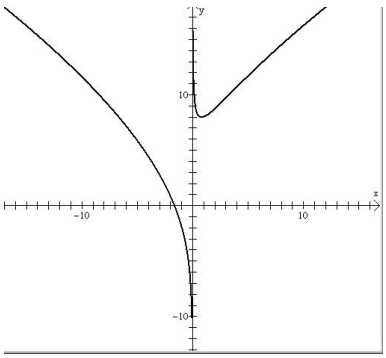
$$f''(x) = \frac{30x^{4/3} - 4x^{1/3}(10x - 3)}{9x^{8/3}} = \frac{x^{1/3}(12 - 10x)}{9x^{8/3}} = \frac{12 - 10x}{9x^{7/3}}.$$

Logo, f tem concavidade para cima em $]0, \frac{6}{5}]$ e para baixo em $]-\infty, 0[$ e $]\frac{6}{5}, +\infty[$. Assim, $x = \frac{6}{5}$ é ponto de inflexão.

Limites: Os limites necessários são calculados diretamente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Assíntotas: f possui assíntota vertical, a reta $x = 0$. f não possui assíntota horizontal, pois $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e nem assíntota inclinada, pois $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.



b) O volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi h r^2$, onde h e r são os catetos do triângulo. Como $r^2 = 5 - h^2$ segue que $V(h) = \frac{1}{3}\pi h(5 - h^2)$, com $h \in]0, \sqrt{5}[$. Temos que $V'(h) = \frac{\pi}{3}(5 - 3h^2)$ e portanto V cresce em $]0, \sqrt{5/3}]$ e decresce em $[\sqrt{5/3}, \sqrt{5}]$. Então o volume máximo ocorre quando $h = \sqrt{5/3}$. Neste caso, $r = \sqrt{10/3}$ e $V = \frac{10\pi}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$.