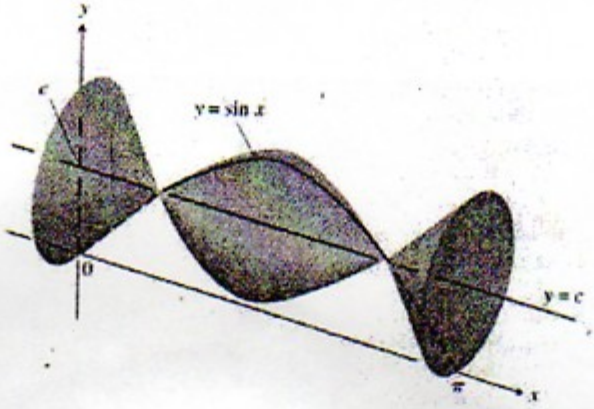
2. O arco de $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$ gira em torno da reta $y = c$, $0 \le c \le 1$, para gerar o sólido da figura.



(a) **(1,0)** Determine o volume do sólido em função de c.

(b) **(1,0)** Para qual valor de $c \in [0,1]$ o volume é máximo? E mínimo?

---

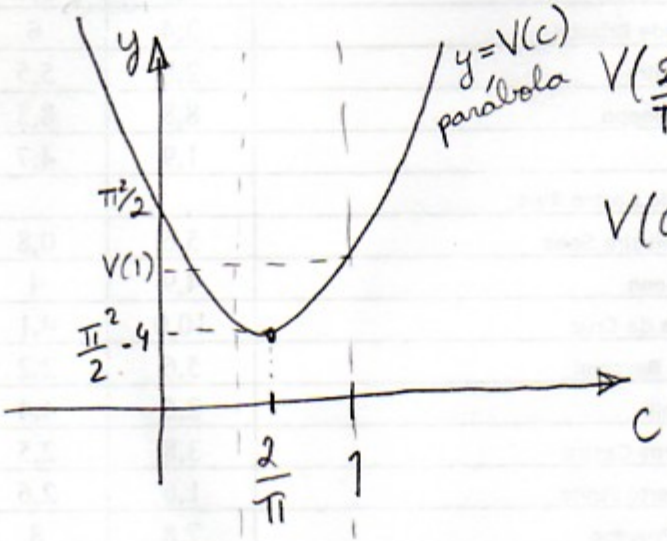
a) $V(c) = \pi \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - c)^2 \, dx = \pi \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}^2 x - 2c \operatorname{sen} x + c^2) \, dx$

$V(c) = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - 2c \operatorname{sen} x + c^2\right) dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + c^2\right) dx - \underbrace{\pi \int_0^{\pi} \cos 2x \, dx}_{=0} - 2c\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

$$\boxed{V(c) = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + c^2\right) - 4\pi c}$$

b) V é um polinômio de grau 2 em c.

$V'(c) = 0 \iff 2c\pi^2 = 4\pi \iff c = \frac{2}{\pi}$ $\quad 0 < \frac{2}{\pi} < 1$



$V\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 4 > 0$

$V(0) = \frac{\pi^2}{2}$ $\quad V(1) = \frac{3\pi^2}{2} - 4\pi$

$= \frac{\pi^2}{2}\underbrace{\left(3 - \frac{8}{\pi}\right)}_{<1}$

$\Rightarrow V(1) < V(0)$

$V\left(\frac{2}{\pi}\right) < V(1) < V(0)$

O volume é mínimo para $c = \frac{2}{\pi}$ e máximo para $c = 0$

A e B

3. Seja $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}$.

(a) **(1,0)** Determine o domínio de f. Encontre os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente. Estude a concavidade de f.

(b) **(2,0)** Verifique se existem assíntotas verticais, horizontais e inclinadas. Calcule os limites necessários e esboce o gráfico de f.

(c) **(1,0)** Seja $g(x) = f(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$. Determine em função de k o número de raízes de g.

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot x^2 - e^{-x} \cdot 2x}{x^4} = \frac{-xe^{-x}(x+2)}{x^4}$$

f': $- - - - -$ -2 $+ + +$ 0 $- - - - -$

f é crescente em $]-2,0[$ e decrescente em $]-\infty,-2[$ e em $]0,+\infty[$

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2e^{-x}}{x^3} \qquad f''(x) = \frac{xe^{-x}(x+2)}{x^4} - 2\frac{[-e^{-x}x^3 - e^{-x} \cdot 3x^2]}{x^6}$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^4}[x^2 + 2x + 2x + 6] = \frac{e^{-x}}{x^4}[(x+2)^2 + 2] > 0 \quad \forall x \in D_f$$

$+ + + + +$ 0 $+ + + + +$

O gráfico de f tem sempre concavidade para cima.

(b) Assíntotas Verticais:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\underbrace{e^x x^2}_{\to 0,\ e>0}} = +\infty.$$

Logo $x = 0$ é assíntota vertical.

Assíntotas Horizontais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to +\infty} x^2} = 0$$

Logo, $y = 0$ é assíntota horizontal

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\nearrow +\infty}{e^{-x}}}{\underset{\searrow +\infty}{x^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-\overset{\nearrow -\infty}{e^{-x}}}{\underset{\to -\infty}{2x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} +\frac{e^{-x}}{2} = +\infty \quad (*)$$

Assim, não há assíntota horizontal para $x \to -\infty$.

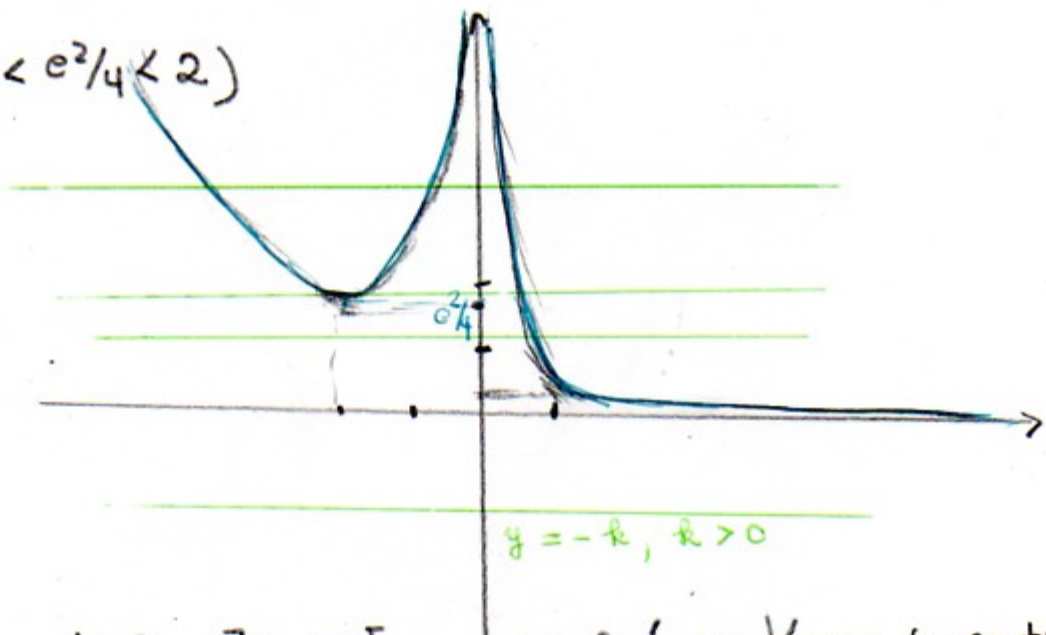
Como $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = +\infty}$, vamos verificar se existe assíntota inclinada em $-\infty$.

Calcular $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\nearrow +\infty}{e^{-x}}}{\underset{\to -\infty}{x^3}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} -\frac{e^{-x}}{3x^2} \underset{(*)}{=} -\infty$

Assim NÃO há assíntota inclinada.

(b) Gráfico de f A e B

x	$f(x)$
-2	$e^2/4$ $(1 < e^2/4 < 2)$
1	$1/e$



(d) Observe que $\operatorname{Im} f =]0, +\infty[$, pois f é contínua (em seu domínio) $f(x) > 0\ \forall x \in D_f$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Considere a equação

$$g(x) = f(x) + k = 0$$

Se $k \geq 0$, então $g(x) > 0\ \forall x \in D_g$ e a equação $g(x) = 0$ não tem raízes.

Se $0 < -k < e^2/4$, então $g(x) = 0$ tem apenas uma raiz $x_0 > 0$, pois $f(x) > e^2/4$ se $x < 0$, $x \neq -2$ e f é estritamente decrescente (portanto injetora em $]0, +\infty[$), contínua e $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

(*) Assim se $-k \in]0, +\infty[$, existe um único $x_0 \in]0, +\infty[$ tal que $f(x_0) = -k$.

Se $-k = e^2/4$, então $g(x) = 0$ tem exatamente 2 raízes, uma em $x = -2$ e outra raiz quando $x > 0$, por (*)

Se $-k > e^2/4$, então $g(x)$ tem exatamente 3 raízes distintas. Uma raiz $x_0 > 0$, por (*). Outra raiz é $x_1 < -2$ e a última é $-2 < x_2 < 0$, já que f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2[$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $f(-2) = e^2/4$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ e f é estritamente crescente em $]-2, 0[$.

Em todos os itens, é essencial a CONTINUIDADE de f em seu domínio, para podermos aplicar o TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO.

A

4. (1,5) Calcule o seguinte limite, caso exista.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{x^6} \sqrt{t^4+9}\mathrm{d}t}.$$

Sejam $F(x)$ uma primitiva de $\operatorname{sen}(x^2)$ e $G(x)$ uma primitiva de $\sqrt{x^4+9}$.

Como $\operatorname{sen}(x^2)$ e $\sqrt{x^4+9}$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$, temos que F e G são deriváveis e

$F'(x) = \operatorname{sen}(x^2)\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $G'(x) = \sqrt{x^4+9}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\,dt = F(x^2) - F(0) \quad \text{e}$$

$$\int_0^{x^6} \sqrt{t^4+9}\,dt = G(x^6) - G(0)$$

Vale que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\,dt = \lim_{x\to 0}\left(F(x^2) - F(0)\right)$

$$= F\left(\lim_{x\to 0} x^2\right) - F(0) = F(0) - F(0) = 0.$$

↳ pois F é contínua

Analogamente, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[G(x^6) - G(0)\right] = \lim_{x\to 0} \int_0^{x^6} \sqrt{t^2+9}\,dt = 0.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{\displaystyle\int_0^{x^6} \sqrt{t^2+9}\,dt} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{F(x^2) - F(0)}^{\to 0}}{\underbrace{G(x^6) - G(0)}_{\to 0}} \quad (*)$$

Vamos ver se existe

$$(*) \lim_{x\to 0} \frac{(F(x^2) - F(0))'}{(G(x^6) - G(0))'} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x^2)\cdot 2x}{G'(x^6)\cdot 6x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)\, 2x}{\sqrt{x^{24}+9}\cdot 6x^5} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^4)}{x^4}}_{\text{limite fundamental}}^{\to 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^{24}+9}}^{\to 1/3} = \frac{1}{9}$$

Logo, pela regra de L'Hôpital $(*) = 1/9$.

B

4. (1,5) Calcule o seguinte limite, caso exista.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)dt}{\int_0^{x^6} \sqrt{t^6+4}dt}.$$

Sejam $F(x)$ uma primitiva de $\operatorname{sen}(x^2)$ e
$G(x)$ uma primitiva de $\sqrt{x^6+4}$.

Como $\operatorname{sen}(x^2)$ e $\sqrt{x^6+4}$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$, temos que F e G são deriváveis e

$F'(x) = \operatorname{sen}(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$G'(x) = \sqrt{x^6+4} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)dt = F(x^2) - F(0)$ e

$\int_0^{x^6} \sqrt{t^6+4}\,dt = G(x^6) - G(0)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)dt = \lim_{x\to 0} F(x^2) - F(0)$$

$$\underset{F \text{ é contínua}}{=} F\left(\lim_{x\to 0} x^2\right) - F(0) = F(0) - F(0) = 0$$

Analogamente, $\lim_{x\to 0} \int_0^{x^6} \sqrt{t^6+4}\,dt = 0$

Logo $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)dt}{\int_0^{x^6} \sqrt{t^6+4}\,dt} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{F(x^2) - F(0)}^{\to 0}}{\underbrace{G(x^6) - G(0)}_{\to 0}} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(F(x^2)-F(0))'}{(G(x^6)-G(0))'} \quad (*)$$

desde que o limite (*) exista

Mas $$(*) = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x^2)\cdot 2x}{G'(x^6)\,6x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)\,2x}{\sqrt{x^{36}+4}\cdot 6x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^4)}{x^4}}_{\text{limite fundamental}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^{36}+4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Logo, $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)dt}{\int_0^{x^6} \sqrt{t^6+4}\,dt} = 1/6.$$

1. Calcule as seguintes integrais:

(a) (1,0) $\int \frac{x^2 dx}{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

(b) (1,5) $\int \frac{\text{arctg}x dx}{(x+1)^2}$

A

1 a) $\int \frac{x^2 dx}{(9-x^2)^{5/2}}$

$x = 3\,\text{sen}\,t$ $\quad x \in]-3,3[$ $\quad \Rightarrow t = \text{arcsen}\frac{x}{3}$

$dx = 3\cos t\, dt$ $\quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\quad \cos t > 0$

$$\int \frac{x^2 dx}{(9-x^2)^{5/2}} = \int \frac{9\,\text{sen}^2 t}{3^5 \cos^5 t} \cdot 3\cos t\, dt = \frac{1}{9}\int \text{tg}^2 t \sec^2 t\, dt = \frac{1}{9}\int v^2 dv =$$

$v = \text{tg}\,t$

$dv = \sec^2 t\, dt$

$$= \frac{v^3}{27} + k,\ k \in \mathbb{R} = \frac{\text{tg}^3}{27}\left(\text{arcsen}\frac{x}{3}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

b) Por Partes

$f(x) = \text{arctg}\,x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow g(x) = -\frac{1}{x+1}$

$$\int \frac{\text{arctg}x\, dx}{(x+1)^2} = -\frac{\text{arctg}x}{x+1} + \int \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} dx$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ B+C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = C$$

$$A + C = 1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}\ \boxed{B = -\frac{1}{2}}\ \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \text{arctg}x\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\text{arctg}x}{(x+1)^2} dx = -\frac{\text{arctg}x}{x+1} + \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \text{arctg}x\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

1. Calcule as seguintes integrais:

(a) **(1,0)** $\int \frac{x^2 dx}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

(b) **(1,5)** $\int \frac{\text{arctg}x dx}{(x-1)^2}$

(B)

(1) a) $\int \frac{x^2 dx}{(4-x^2)^{5/2}}$ $\quad x = 2\,\text{sen}\,t \quad dx = 2\cos t\, dt \quad x \in]-2,2[\quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow t = \text{arcsen}\frac{x}{2} \quad \cos t > 0$

$$\int \frac{x^2 dx}{(4-x^2)^{5/2}} = \int \frac{4\,\text{sen}^2 t \cdot 2\cos t\, dt}{2^5 \cos^5 t} = \frac{1}{4}\int \text{tg}^2 t \sec^2 t\, dt = \frac{1}{4}\int v^2 dv$$

$v = \text{tg}\,t$

$dv = \sec^2 t\, dt$

$$= \frac{v^3}{12} + k, k \in \mathbb{R} = \frac{\text{tg}^3}{12}\left(\text{arcsen}\frac{x}{2}\right) + k, k \in \mathbb{R}$$

b) Por Partes

$f(x) = \text{arctg}\,x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow g(x) = -\frac{1}{x-1}$

$$\int \frac{\text{arctg}x}{(x-1)^2} dx = -\frac{\text{arctg}x}{x-1} + \int \frac{1}{(x-1)(1+x^2)} dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(1+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = 1$$

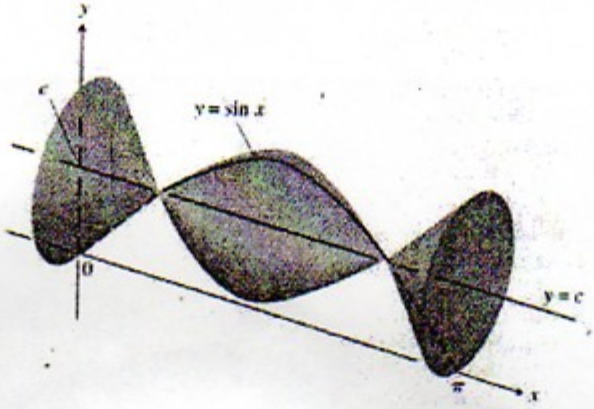
$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -B+C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -C = A$$

$$A - C = 1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}} \boxed{B = -\frac{1}{2}} \boxed{C = -\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \text{arctg}x\right) + k, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\text{arctg}x}{(x-1)^2} dx = -\frac{\text{arctg}x}{x-1} + \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \text{arctg}x\right) + k, k \in \mathbb{R}$$

2. O arco de $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$ gira em torno da reta $y = c$, $0 \le c \le 1$, para gerar o sólido da figura.



(a) **(1,0)** Determine o volume do sólido em função de c.

(b) **(1,0)** Para qual valor de $c \in [0,1]$ o volume é máximo? E mínimo?

---

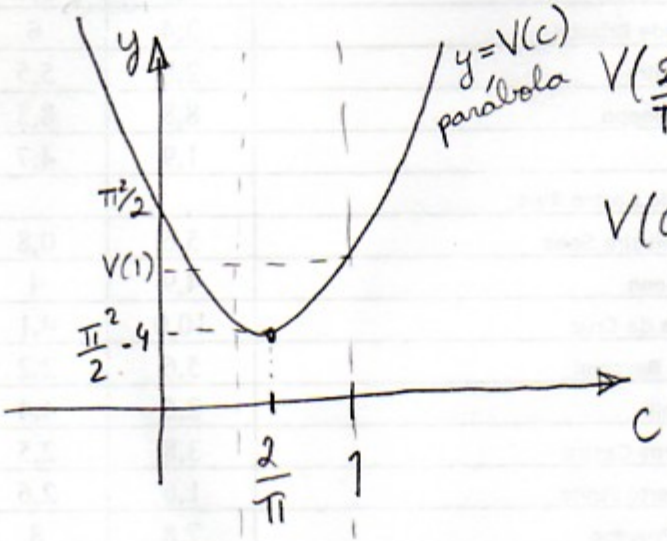
a) $V(c) = \pi \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - c)^2 \, dx = \pi \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}^2 x - 2c \operatorname{sen} x + c^2) \, dx$

$V(c) = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - 2c \operatorname{sen} x + c^2\right) dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + c^2\right) dx - \underbrace{\pi \int_0^{\pi} \cos 2x \, dx}_{=0} - 2c\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

$$\boxed{V(c) = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + c^2\right) - 4\pi c}$$

b) V é um polinômio de grau 2 em c.

$V'(c) = 0 \iff 2c\pi^2 = 4\pi \iff c = \frac{2}{\pi}$ $\quad 0 < \frac{2}{\pi} < 1$



$V\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 4 > 0$

$V(0) = \frac{\pi^2}{2}$ $\quad V(1) = \frac{3\pi^2}{2} - 4\pi$

$= \frac{\pi^2}{2}\underbrace{\left(3 - \frac{8}{\pi}\right)}_{<1}$

$\Rightarrow V(1) < V(0)$

$V\left(\frac{2}{\pi}\right) < V(1) < V(0)$

O volume é mínimo para $c = \frac{2}{\pi}$ e máximo para $c = 0$