MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

2º semestre de 2006 - PROVA SUBSTITUTIVA

TURMA:_____

Nome_____

Assinatura_____

Número USP _____ Professor: _____

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
A-Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS

1. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(\frac{1}{x^2+x}\right) & , \text{ se } x > 0 \\ 0 & , \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$.

a) (1,0) f é derivável em $x_0 = 0$?

b) (1,0) Seja $g(x) = \begin{cases} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ se } x > 0 \\ 1 & , \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$.

A função g é contínua em $x_0 = 0$?

SOLUÇÃO:

a) SIM, POIS EXISTE $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ UMA VEZ QUE:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x \ln\left(\frac{1}{x^2+x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2+x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-(2x+1)}{x^2+x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(2x+1)}{x+1} = 0$$

(L'HOSPITAL)

E

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0 \qquad \therefore \quad f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

b) NÃO, POIS f DERIVÁVEL EM $0 \Rightarrow f$ CONTÍNUA EM 0 $\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

DAÍ:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{f(x)}_{0} \underbrace{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{LIMITADA}} = 0 \neq 1 = g(0)$$

2. (1,5) Prove que, para todo $a \in [0,1[$ vale a seguinte desigualdade:

$$\left|\frac{\text{sen}(\pi a^2)}{a-1}\right| \leq 2\pi \ .$$

Resolução:

Considere a função $f(x) = \text{sen}\ (\pi x^2)$ para $x \in [a,1]$, onde $0 \leq a < 1$.

Como $g(x) = \pi x^2$ é contínua em $[a,1]$, pois é uma função polinomial e $h(y) = \text{sen}\ (y)$ é uma função contínua em $[a,1]$, pois é uma função trigonométrica, segue que $f(x) = h(g(x)) = \text{sen}\ (\pi x^2)$ também é contínua em $[a,1]$, pois é composta de funções contínuas.

Como $g(x) = \pi x^2$ é derivável em $]a,1[$, pois é uma função polinomial e $h(y) = \text{sen}\ (y)$ é uma função derivável em $]a,1[$, pois é uma função trigonométrica, segue que $f(x) = h(g(x)) = \text{sen}\ (\pi x^2)$ também é derivável em $]a,1[$, pois é composta de funções deriváveis.

Portanto, aplicando o T.V.M. para f definida no intervalo $[a,1]$ temos que existe $c \in]a,1[$, tal que $f(1) - f(a) = f'(c)(1-a)$, onde $f'(x) = 2x\pi\text{cos}\ (\pi x^2)$.

Assim,

$$\text{sen}\ (\pi 1^2) - \text{sen}\ (\pi a^2) = 2c\pi\text{cos}\ (\pi c^2)(1-a),\ \forall a \in [0,1[$$

Ou seja,

$$|\text{sen}\ (\pi 1^2) - \text{sen}\ (\pi a^2)| = |2c\pi\text{cos}\ (\pi c^2)(1-a)|,\ \forall a \in [0,1[$$

Como $\text{sen}\ (\pi 1^2) = 0$, $|c| \leq 1$ e $|\text{cos}\ (\pi c^2)| \leq 1$, segue que:

$$|-\text{sen}\ (\pi a^2)| \leq 2\pi|1-a|,\ \forall a \in [0,1[$$

Portanto,

$$\frac{|-\text{sen}\ (\pi a^2)|}{|1-a|} \leq 2\pi,\ \forall a \in [0,1[$$

Ou seja,

$$\left|\frac{\text{sen}\ (\pi a^2)}{a-1}\right| \leq 2\pi,\ \forall a \in [0,1[$$

3. Seja $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$.

a) (1,0) Determine o domínio de f e estude o crescimento e decrescimento da função, indicando os pontos de máximo e mínimo.

b) (1,0) Calcule os limites necessários para determinar <u>todos</u> os números reais k para os quais <u>existe um único</u> $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x) = k$.

a) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2-3) - e^x \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$$

$f'(x) = 0$ se $x = -1$ ou $x = 3$

	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$		3	
f'	+		+		−		−	+
f	↗		↗		↘		↘	↗

$x = -1$ é ponto de máximo local $\quad f(-1) = -\dfrac{1}{2e}$

$x = 3$ é ponto de mínimo local $\quad f(3) = \dfrac{e^3}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2-3} = 0$

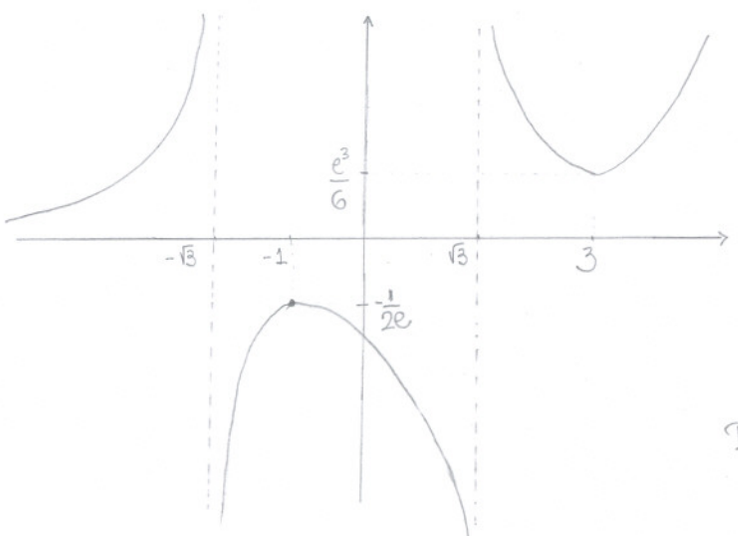
$\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-} \dfrac{e^x}{x^2-3} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+} \dfrac{e^x}{x^2-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-} \dfrac{e^x}{x^2-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} \dfrac{e^x}{x^2-3} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2-3} \overset{\text{L'Hosp (\#)}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} \overset{\text{L'Hosp (\#)}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$



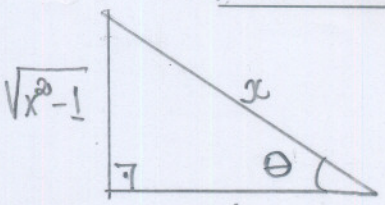
Resposta: $k \in \left\{-\dfrac{1}{2e}\right\} \cup \left]0, \dfrac{e^3}{6}\right[$

4. Calcule as integrais abaixo:

a) (1,0) $\int_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ b) (1,5) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$

(a) Primeiro vamos calcular: $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$. Temos que ter $x^2-1 \geq 0$, o que implica que $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$. Assim

$\boxed{x = \sec\theta}$, com $\theta \in [0, \pi/2[$ ou $\theta \in [\pi, 3\pi/2[$.



Logo $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} = |\operatorname{tg}\theta| = \operatorname{tg}\theta$, pois $\operatorname{tg}\theta \geqslant 0 \ \forall\ \theta \in [0, \pi/2[\cup [\pi, 3\pi/2[$.

$\boxed{dx = \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta}$.

Portanto $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg}\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \int \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$

$= \int (\sec^2\theta - 1)\,d\theta = \int \sec^2\theta\,d\theta - \int d\theta =$

$\operatorname{tg}\theta - \theta + C$, $C \in \mathbb{R}$ $= \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec}\theta + C$.

Agora, $\int_{2/\sqrt{2}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx \overset{TFC}{=} \sqrt{2^2-1} - \operatorname{arcsec} 2 - \left[\sqrt{4/2 - 1} - \operatorname{arcsec}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$= \sqrt{3} - \pi/3 - 1 + \pi/4$

$\boxed{= \sqrt{3} - 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}}$

(b) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$

Vamos integrar por partes fazendo $\boxed{u = \operatorname{arctg} x}$ e $\boxed{dv = x^2\,dx}$. Então $du = \frac{dx}{1+x^2}$ e $v = \frac{x^3}{3}$.

Logo $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{dx}{1+x^2}$.

Vamos então calcular $\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

4 (b) $x^3 = x(x^2+1) - x$

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}$$

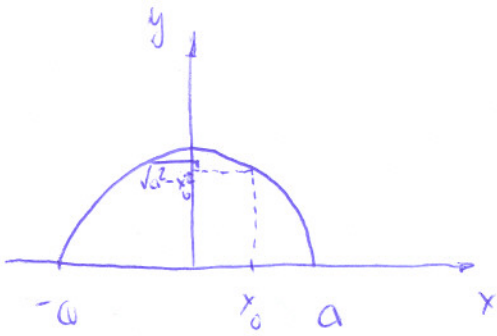
Logo $$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

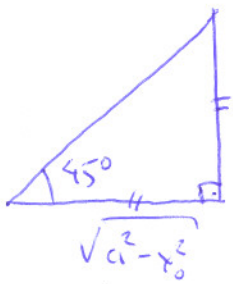
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

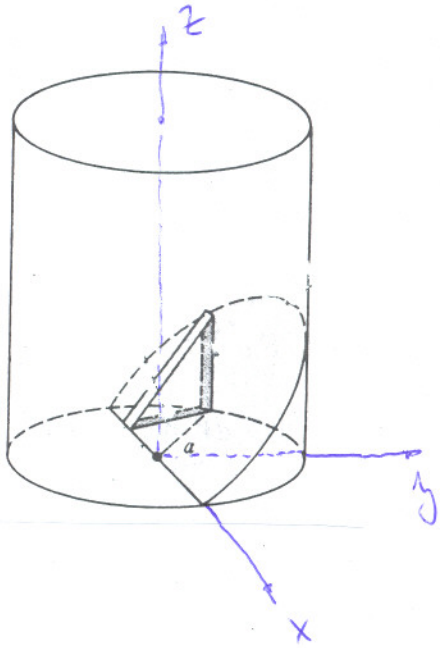
Portanto: $$\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \ln\sqrt{x^2+1}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5. (2,0) Obtemos uma cunha cortando um cilindro de raio $a = 6\,\text{cm}$ por um plano inclinado, conforme a figura. Suponha que o plano forma um ângulo de 45° com a base do cilindro e que a intersecção do plano com a base do cilindro é um diâmetro. Calcule o volume da cunha.

(Dica: as secções transversais ao diâmetro são triângulos.)







Dado $x_0 \in]-a, a[$, a secção transversal ao sólido, ortogonal ao eixo dos x e passando por x_0, é um triângulo retângulo isósceles de base $\sqrt{a^2 - x_0^2}$. Portanto, o volume do sólido em questão será dado por:

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx,$$

onde $A : [a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}(a^2-x^2).$$

Ou seja, $V = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(a^2-x^2)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{a} \frac{1}{2}(a^2-x^2)\,dx =$

$$= \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3 = 144.$$

↓ T.F.C.

#