MAT 2453 - P3

Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

23.06.2009

Resolução da Questão 1

Sejam B o comprimento da base maior do trapézio, b o da base menor, x o dos lados, $A = 10$ a área e θ o ângulo da base ($\theta = \pi/4$ para provas tipo "A" e $\theta = \pi/3$ para provas tipo "B"). Tem-se $A = bx\sin\theta + x^2\sin\theta\cos\theta$, donde $b = \frac{A}{x\sin\theta} - x\cos\theta$. O perímetro P do trapézio é dado por $P = B + b + 2x = 2b + 2x\cos\theta + 2x = \frac{2A}{x\sin\theta} + 2x$. Assim, tomando-se $P : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \frac{2A}{x\sin\theta} + 2x$, o problema se reduz a encontrar, caso exista, o(s) ponto(s) de mínimo de P. Ora, P é duas vezes derivável, sendo $P' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $P'' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto -\frac{2A}{\sin\theta}\frac{1}{x^2} + 2$ e $x \mapsto \frac{4A}{\sin\theta}\frac{1}{x^3}$. Como P'' é estritamente positiva, segue-se como corolário do Teorema do Valor Médio (TVM) que P' é estritamente crescente. Assim, como P' se anula apenas em $x_0 = \sqrt{\frac{A}{\sin\theta}}$, conclui-se que $P' < 0$ em $(0, x_0)$ e $P' > 0$ em $(x_0, +\infty)$, donde, novamente como corolário do TVM, P é estritamente decrescente em $(0, x_0]$ e estritamente crescente em $[x_0, +\infty)$. Conclui-se, então, que $x_0 = \sqrt{\frac{A}{\sin\theta}}$ (i.e. $x_0 = \sqrt{10\sqrt{2}}$ para provas tipo "A" e $x_0 = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}$ para provas tipo "B") é o único ponto de mínimo de P - que corresponde, portanto, ao lado do trapézio que tem perímetro mínimo.

-A-

1) Calcule as seguintes integrais:

(1,5) a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+5}} = \int \frac{2udu}{(u^2-4)u} = \int \frac{2du}{(u-2)(u+2)} = \int \left[\frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}\right] du = (*)$

$$\begin{array}{rcl} u & = & \sqrt{x+5} \\ x & = & u^2-5 \\ x+1 & = & u^2-4 \\ dx & = & 2udu \end{array}$$

$$\frac{2}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2} = \frac{(A+B)u + 2A - 2B}{(u-2)(u+2)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A-2B=2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1/2 \\ B=-1/2 \end{array} \right.$$

$$(*) = \int \left[\frac{1/2}{u-2} + \frac{-1/2}{u+2}\right] du = \frac{1}{2}\ln|u-2| - \frac{1}{2}\ln|u+2| + k =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+5}-2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+5}+2\right| + k$$

(1,5) b) $\displaystyle\int x\,\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1})\,dx = \frac{x^2}{2}\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$

$$\begin{array}{cc} u = \text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) & du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx \\ dv = x\,dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} u = x^2-1 \\ du = 2x\,dx \end{array}$$

$$= \frac{x^2}{2}\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{x^2}{2}\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\sqrt{u} + k =$$

$$= \frac{x^2}{2}\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + k.$$

-B-

1) Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(1,5) a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+10}} = \int \frac{2udu}{(u^2-9)u} = \int \frac{2du}{(u-3)(u+3)} = \int \left[\frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3}\right] du = (*)$

$$\begin{array}{rcl} u & = & \sqrt{x+10} \\ x & = & u^2-10 \\ x+1 & = & u^2-9 \\ dx & = & 2udu \end{array}$$

$$\frac{2}{(u-3)(u+3)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3} = \frac{(A+B)u + 3A - 3B}{(u-3)(u+3)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ 3A-3B=2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1/3 \\ B=-1/3 \end{array} \right.$$

$$(*) = \int \left[\frac{1/3}{u-3} + \frac{-1/3}{u+3}\right] du = \frac{1}{3}\ln|u-3| - \frac{1}{3}\ln|u+3| + k =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{x+10}-3\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{x+10}+3\right| + k.$$

(1,5) b) $\displaystyle\int x\,\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1})\,dx = \frac{x^2}{2}\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$

$$\begin{array}{cc} u = \text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) & du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx \\ dv = x\,dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u = x^2-1 \\ du = 2x\,dx \end{array}$$

$$= \frac{x^2}{2}\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{x^2}{2}\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\sqrt{u} + k =$$

$$= \frac{x^2}{2}\text{arctg}\,(\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + k.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

TURMA A: Usando a regra de L'Hospital obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^3}\,dt}{\int_0^{x^2} e^{2t^2}\,dt} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^9}3x^2}{e^{2x^4}2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^9}}{e^{2x^4}} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 0 = 0$$

TURMA B: Usando a regra de L'Hospital obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} e^{2t^2}\,dt}{\int_0^{x^3} e^{t^3}\,dt} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x^4}2x}{e^{x^9}3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x^4}}{e^{x^9}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot +\infty = +\infty$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

TURMA A: Usando a regra de L'Hospital obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^3}\,dt}{\int_0^{x^2} e^{2t^2}\,dt} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^9}3x^2}{e^{2x^4}2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^9}}{e^{2x^4}} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 0 = 0$$

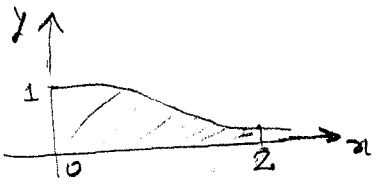
TURMA B: Usando a regra de L'Hospital obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} e^{2t^2}\,dt}{\int_0^{x^3} e^{t^3}\,dt} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x^4}2x}{e^{x^9}3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x^4}}{e^{x^9}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot +\infty = +\infty$$

Prova A

4-) (2,5 pontos) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}\}$.

$$vol. = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$$

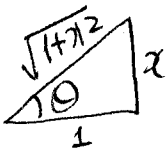


Calculemos $I = \int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$, com a substituição $\begin{cases} x = tg\theta, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ dx = sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

fica $I = \int \frac{sec^2\theta\, d\theta}{(1+tg^2\theta)^2} = \int \frac{d\theta}{sec^2\theta} = \int cos^2\theta\, d\theta =$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{sen2\theta}{2}\right) + C = \frac{1}{2}(\theta + sen\theta\cos\theta) + C$$

e voltando para a variável x:



$x = tg\theta$

$\therefore \theta = arctg\, x$

$\therefore \begin{cases} sen\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

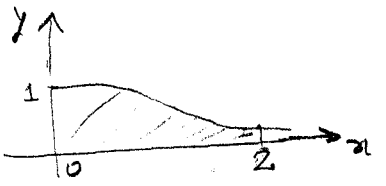
$$\therefore vol = \frac{\pi}{2}\left[arctg2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(arctg2 + \frac{2}{5}\right).$$

(Para a prova B, substituir 2 por 3, na integral inicial, obtendo-se: $vol. = \frac{\pi}{2}\left(arctg3 + \frac{3}{10}\right)$)

Prova A

4-) (2,5 pontos) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}\}$.

$$vol. = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$$

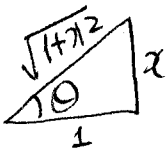


Calculemos $I = \int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$, com a substituição $\begin{cases} x = tg\theta, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ dx = sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$

fica $I = \int \frac{sec^2\theta\, d\theta}{(1+tg^2\theta)^2} = \int \frac{d\theta}{sec^2\theta} = \int cos^2\theta\, d\theta =$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{sen2\theta}{2}\right) + C = \frac{1}{2}(\theta + sen\theta\cos\theta) + C$$

e voltando para a variável x:



$x = tg\theta$

$\therefore \theta = arctg\, x$

$\therefore \begin{cases} sen\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

$$\therefore vol = \frac{\pi}{2}\left[arctg2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(arctg2 + \frac{2}{5}\right).$$

(Para a prova B, substituir 2 por 3, na integral inicial, obtendo-se: $vol. = \frac{\pi}{2}\left(arctg3 + \frac{3}{10}\right)$)

MAT 2453 - P3

Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

23.06.2009

Resolução da Questão 1

Sejam B o comprimento da base maior do trapézio, b o da base menor, x o dos lados, $A = 10$ a área e θ o ângulo da base ($\theta = \pi/4$ para provas tipo "A" e $\theta = \pi/3$ para provas tipo "B"). Tem-se $A = bx\sin\theta + x^2\sin\theta\cos\theta$, donde $b = \frac{A}{x\sin\theta} - x\cos\theta$. O perímetro P do trapézio é dado por $P = B + b + 2x = 2b + 2x\cos\theta + 2x = \frac{2A}{x\sin\theta} + 2x$. Assim, tomando-se $P : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \frac{2A}{x\sin\theta} + 2x$, o problema se reduz a encontrar, caso exista, o(s) ponto(s) de mínimo de P. Ora, P é duas vezes derivável, sendo $P' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $P'' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $x \mapsto -\frac{2A}{\sin\theta}\frac{1}{x^2} + 2$ e $x \mapsto \frac{4A}{\sin\theta}\frac{1}{x^3}$. Como P'' é estritamente positiva, segue-se como corolário do Teorema do Valor Médio (TVM) que P' é estritamente crescente. Assim, como P' se anula apenas em $x_0 = \sqrt{\frac{A}{\sin\theta}}$, conclui-se que $P' < 0$ em $(0, x_0)$ e $P' > 0$ em $(x_0, +\infty)$, donde, novamente como corolário do TVM, P é estritamente decrescente em $(0, x_0]$ e estritamente crescente em $[x_0, +\infty)$. Conclui-se, então, que $x_0 = \sqrt{\frac{A}{\sin\theta}}$ (i.e. $x_0 = \sqrt{10\sqrt{2}}$ para provas tipo "A" e $x_0 = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}$ para provas tipo "B") é o único ponto de mínimo de P - que corresponde, portanto, ao lado do trapézio que tem perímetro mínimo.