MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

1º semestre de 2006 - 3ª PROVA - 27/06/2006

A

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS

Questão 1. Calcule as seguintes integrais:

(1,0) (a) $\int x^2 \text{sen}(2x)\,\text{d}x$ (1,5) (b) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}\,\text{d}x$

(a)Usaremos *integração por partes*. Seja $u = x^2$ e $\text{d}v = \text{sen}(2x)\text{d}x$. Então $\text{d}u = 2x\text{d}x$ e $v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$. Assim:

$$\int x^2 \text{sen}(2x)\,\text{d}x = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) - \int[-\frac{1}{2}\cos(2x)]2x\text{d}x = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int x\cos(2x)\text{d}x.$$

Vamos agora calcular $\int x\cos(2x)\text{d}x$. Para isso, usamos novamente integração por partes, desta vez com $u = x$ e $\text{d}v = \cos(2x)\text{d}x$. Temos então que $\text{d}u = \text{d}x$ e $v = \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$ e

$$\int x\cos(2x)\text{d}x = \frac{1}{2}x\text{sen}(2x) - \int \frac{1}{2}\text{sen}(2x)\text{d}x = \frac{1}{2}x\text{sen}(2x) - \frac{1}{4}[-\cos(2x)] + C, C \in \mathbb{R}.$$

Logo:

$$\boxed{\int x^2 \text{sen}(2x)\,\text{d}x = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\text{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C, C \in \mathbb{R}.}$$

(b)Usaremos uma *substituição trigonométrica*. Faça $x = 2\text{tg}\theta$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Então $\text{d}x = 2\text{sec}^2\theta\text{d}\theta$. Como $\theta = \text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$, temos que $\theta = \frac{\pi}{4}$ se $x = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ se $x = 2\sqrt{3}$ e usando também o *Teorema de Mudança de Variável na Integral Definida*, temos que:

$$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}\,\text{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\text{sec}^3\theta}{16\text{tg}^4\theta}\text{d}\theta = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\theta}{\text{sen}^4\theta}\text{d}\theta.$$

Mas, uma primitiva de $\frac{\cos\theta}{\text{sen}^4\theta}$ é $\frac{\text{sen}^{-3}(\theta)}{-3}$ e assim, pelo *Teorema Fundamental do Cálculo* obtemos:

$$\boxed{\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}\,\text{d}x = -\frac{1}{12}\left[\text{sen}^{-3}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}^{-3}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-3} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}\right]}$$

Questão 2. Calcule as seguintes integrais:

(1,0) a) $\displaystyle\int \frac{\cos^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos^3(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos^3(u)\,du = 2\int \cos^2(u)\cos(u)\,du =$

$$\downarrow$$

$$\boxed{u=\sqrt{x} \qquad du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx}$$

$$= 2\int(1-\text{sen}^2(u))\cos(u)\,du = 2\int(1-v^2)\,dv = 2v - 2\frac{v^3}{3} + k = 2\text{sen}\,u - 2\frac{\text{sen}^3(u)}{3} + k =$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{v=\text{sen}(u) \qquad dv=\cos(u)\,du}$$

$$= 2\text{sen}(\sqrt{x}) - 2\frac{\text{sen}^3(\sqrt{x})}{3} + K,\ K\in\mathbb{R}.$$

(1,5) a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2+4)}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{\ln(x^2+4)}{x+1} + \int \frac{2x}{(x+1)(x^2+4)}\,dx =$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=\ln(x^2+4) & du=\dfrac{2x}{x^2+4} \\ dv=\dfrac{1}{(x+1)^2}\,dx & v=-\dfrac{1}{x+1}\end{array}}$$

$$= -\frac{\ln(x^2+4)}{x+1} + \int\left[\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\right]dx = -\frac{\ln(x^2+4)}{x+1} + \int\left[\frac{\frac{-2}{5}}{x+1}+\frac{\frac{2}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+4}\right]dx =$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4} = \dfrac{(A+B)x^2+(B+C)x+(4A+C)}{(x+1)(x^2+4)} \\ \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ B+C=2 \\ 4A+C=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-2/5 \\ B=2/5 \\ C=8/5\end{array}\right.\end{array}}$$

$$= -\frac{\ln(x^2+4)}{x+1} - \frac{2}{5}\int\frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{5}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx + \frac{8}{5}\int\frac{1}{x^2+4}\,dx =$$

$$= -\frac{\ln(x^2+4)}{x+1} - \frac{2}{5}\ln|x+1| + \frac{1}{5}\ln(x^2+4) + \frac{4}{5}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + K,\ K\in\mathbb{R}.$$

Questão 3. Seja $F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, \mathrm{d}t.$$

(1,0)(a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.
(1,5)(b) Calcule

$$\lim_{x \to 2} \frac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x - 2)}.$$

(a) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $F'(x) = \sqrt{x^3 - 1}$. Logo, o comprimento L do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$ é

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + (F'(x))^2}\, \mathrm{d}x = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_1^4 = \frac{2}{5}\left[2^5 - 1\right] = \frac{62}{5}.$$

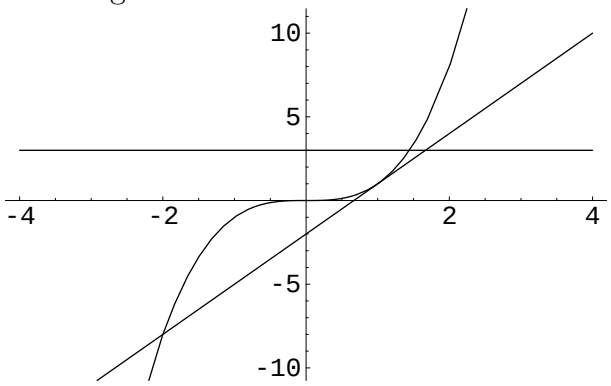
(b) Observe que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_1^{x^3} \sqrt{t^3 - 1}\, \mathrm{d}t = \sqrt{(x^3)^3 - 1} \cdot 3x^2 = 3x^2\sqrt{x^9 - 1}.$$

Portanto, pela Regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x \to 2} \frac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2\sqrt{x^9 - 1}}{\cos(x - 2)} = 12\sqrt{2^9 - 1}.$$

Questão 4. (2,5) Seja R a região do plano delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x^3$ e por sua reta tangente em $x = 1$. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno da reta $y = 3$.



Como $f'(x) = 3x^2$, temos que $f'(1) = 3$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é $y - 1 = 3(x - 1)$, ou , $y = 3x - 2$. A intersecção do gráfico de f com a reta $y = 3x - 2$ ocorre em nos pontos $(1, 1)$ (*é claro!*) e em $(-2, -8)$ (*encontre esse ponto!*). A região R é então

$$R = \{(x, y) \in I\!R^2 | -2 \leq x \leq 1, 3x - 2 \leq y \leq x^3\}.$$

Quando a região R gira em torno da reta $y = 3$, obtemos um sólido cujas secções transversais por planos ortogonais ao eixo x e passando por x são arruelas com o raio menor igual a $3 - x^3$ e raio maior igual a $3 - (3x - 2)$. Logo o volume do sólido é:

$$\int_{-2}^{1} \pi \left[(5 - 3x)^2 - (3 - x^3)^2\right] \mathrm{d}x.$$

Agora é só calcular essa integral!

$\int \left[(5 - 3x)^2 - (3 - x^3)^2\right] \mathrm{d}x =$

$\int \left[(25 - 30x + 9x^2) - (9 - 6x^3 + x^6)\right] \mathrm{d}x = 16x - \dfrac{30x^2}{2} + 9\dfrac{x^3}{3} + 6\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^7}{7} + C, C \in I\!R$. Portanto o volume pedido é:

$$\int_{-2}^{1} \pi \left[(5 - 3x)^2 - (3 - x^3)^2\right] \mathrm{d}x = \pi \left(16x - \frac{30x^2}{2} + 9\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$= \pi \left(16 - \frac{30}{2} + 9\frac{1}{3} + 6\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) - \pi \left[16(-2) - \frac{30(-2)^2}{2} + 9\frac{(-2)^3}{3} + 6\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^7}{7}\right] = \frac{1107}{14}\pi.$$