**MAT 2453 - P3**
**Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I**
**28.06.2005**

## (A ímpar B par)

QUESTÃO **1.** (2,5 pontos) *Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto de todos os pontos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $y \geqslant x^2$, $y \leqslant \sqrt{x}$ *e* $y \geqslant \frac{1}{8x}$.

Temos,

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$$
$$\tfrac{1}{8x} \leq y \leq \sqrt{x}$$

Intersecções:

$$x^2 = \sqrt{x} \quad see \quad x = 0 \text{ ou } x = 1$$
$$\tfrac{1}{8x} = \sqrt{x} \quad see \quad x = \tfrac{1}{4}$$
$$x^2 = \tfrac{1}{8x} \quad see \quad x = \tfrac{1}{2}$$

O volume da rotação de uma função $f(x)$ em torno do eixo $x$ em um intervalo $[a, b]$ é dado por

$$\int_a^b \pi \ f^2(x) \ dx$$

Dai o volume pedido é obtido pelo cálculo de

$$\begin{aligned} V &= \pi\Big(\int_{1/4}^{1/2} (x - \frac{1}{64x^2}\,)\,dx + \int_{1/2}^{1} (x - x^4)\,dx\Big) = \\ &= \pi\Big(\big[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{64x}\big]_{1/4}^{1/2} + \big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\big]_{1/2}^{1}\Big) = \\ &= \frac{39\pi}{160}\,. \end{aligned}$$

QUESTÃO **2.** *Calcule as seguintes integrais indefinidas:*

(a) (1,5 pontos)
$\int \dfrac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)}\,dx;$

(b) (1 ponto) $\int \dfrac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx;$

(c) (1 ponto) $\int \text{sen}\,\sqrt{x}\,dx.$

(a) Temos que

$$\begin{array}{rcl} \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)} & = & \frac{Ax+B}{x^2-2x+2}\,\frac{C}{x+1} \\ \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)} & = & \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)(x+1)} \end{array}$$

Donde devemos ter que $4x^2-3x+3 \;=\; (Ax+B)(x+1)+C(x^2-2x+2)$.
Por igualdade de polinômios, temos

$$\begin{array}{ll} x^2: & A+C=4 \\ x^1: & A+B-2C=-3 \\ x^0: & B+2C=3 \end{array}$$

Dai,

$$\begin{array}{l} A=4-C \\ B=3-2CA+B-2C=-3 \end{array}$$

Donde,

$$\begin{array}{l} A=4-C \\ B=3-2C4-C+3-2C-2C=-3 \end{array}$$

dai, $C=2$, $A=2$ e $B=-1$.
Desse modo, a integral equivale a

$$\int \tfrac{2x+1}{x^2-2x+2}\,dx+\int \tfrac{2}{x+1}\,dx = \; I+II$$

II é dada imediatamente por $2\ln|x+1|$.
I é dada por

$$\int \tfrac{2x+1}{x^2-2x+2}\,dx \;=\; \int \tfrac{2x+1}{(x-1)^2+1}\,dx$$

Chamando $x-1=u$ e substituindo, temos

$$\int \tfrac{2u+3}{u^2+1}\,dx \;=\; \int \tfrac{2u}{u^2+1}\,dx+\int \tfrac{3}{u^2+1}\,dx \;=\; \ln(u^2+1)+3\;arctg\;u$$

Substituindo e somando a II, temos

$$2\ln|x+1| + \ln(x^2-2x+2) + 3\ arctg\ (x-1) + K$$

b) $\int \dfrac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\ dx$
Temos,

$$\frac{x}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \frac{x}{2\sqrt{1-(\frac{x-2}{2})^2}}$$

Fazendo $\frac{x-2}{2} = u$ e substituindo, temos,

$$\int \frac{2u+2}{\sqrt{1-u^2}}\ du = \int \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}\ du + \int \frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\ du = -2\sqrt{1-u^2} + 2\ arcsin\ u + K$$

Substituindo inversamente, temos

$$-\sqrt{x^2-4x} + 2\ arcsin\ \frac{x-2}{2} + K$$

c) $\int \text{sen}\ \sqrt{x}\, dx$
Faça $\sqrt{x} = u$. Substituia e obtenha $\int 2u \sin u\ du$. Por partes,
temos

$$\int 2u\sin u\ du = -2u\cos u + \int 2\cos u\ du = -2u\cos u + 2\sin u + K$$

Fazendo a substituição inversa. temos

$$-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + K$$

QUESTÃO **3.** (2,0 pontos) *Estude a convergência das seguintes integrais impróprias:*

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x^2+1}{\sqrt{\sin x}}\, dx$;

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x^2+1}{\sqrt{\sin x}}\, dx$
A função $\frac{x^2+1}{\sqrt{\sin x}}$ **não** está definida em 0. Temos

$$x - \frac{x^3}{6} \leq sinx$$

para $x$ suficientemente pequeno. Dai, se
$(A)$ $\int_0^{\pi/2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x-\frac{x^3}{6}}}\, dx$ *converge*,
a integral dada *converge*.
Agora, $\frac{x}{6} \leq x - \frac{x^3}{6}$ (temos que $0 < x < 1$)
e se
$(B)$ $\int_0^{\pi/2} \frac{x^2+1}{\sqrt{\frac{x}{6}}}\, dx$
*converge*, a integral (A) *converge*.
Temos:

$$\begin{array}{l}\int_0^{\pi/2} \frac{x^2+1}{\sqrt{\frac{x}{6}}}\, dx \;=\; \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sqrt{\frac{x}{6}}}\, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{6}}}\, dx \;= \\ \sqrt{6}(x^{3/2})|_0^{\pi/2} + lim_{y\to 0}\int_y^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{6}}}\, dx \;= \\ \sqrt{6}((\pi/2)3/2) + lim_{y\to 0} 2.x^{1/2}|_y^{\pi/2}) \;= \\ \sqrt{6}((\pi/2)3/2) + 2(\pi/2)^{1/2}\end{array}$$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$
Temos que

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq xe^{-x}$$

desde que $1/x \leq \sqrt{x}$ para $x \geq 1$.

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\, dx \;=\; lim_{y\to+\infty}\int_1^y xe^{-x}\, dx \;=\; lim_{y\to+\infty}(-x-1)e^{-x}|_1^y \;= \\ 2e^{-1}$$

desde que, usando L'Hospital $lim_{y\to+\infty}(-y-1)e^{-y} = 0$.

QUESTÃO **4.** (2,0 pontos) *Calcule o seguinte limite (caso exista):*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t^2 \, dt}{\int_0^x e^{-t^2} \, dt}.$$

SUGESTÃO: *Regra de L'Hôpital.*

Sejam $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t^2 \ dt$ e $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} \ dt$; $F$ e $G$ são contínuas, usando-se o 2o teorema fundamental e a continuidade da composição de funções contínuas.

Daí, $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0} G(x) = G(0) = 0$.

Temos, por L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^4 . 2x}{e^{-x^2}} = 0,$$

donde o limite acima vale 0.