(3,5) **Questão 1.**

a) Encontre o ponto de mínimo de $g(x) = 3x^2 + 1 - \ln x$ e conclua que $g(x) > 0$, para todo $x \in]0, +\infty[$;

b) Esboce o gráfico de $f(x) = 3x + \dfrac{\ln x}{x}$, determinando seu domínio, os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, concavidades e assíntotas (caso existam).

a) $g'(x) = 6x - \frac{1}{x} = \frac{6x^2-1}{x}$ e $g'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 = 1 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

	0		$1/\sqrt{6}$	
g'		−	0	+
g		↘		↗

g é estritamente decrescente em $]0, 1/\sqrt{6}]$ e estritamente crescente em $[1/\sqrt{6}, +\infty[$. Logo, $x = 1/\sqrt{6}$ é ponto de mínimo global

Como $g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{3}{2} - \underbrace{\ln \frac{1}{\sqrt{6}}}_{<0} > 0$, temos que $g(x) > 0$, $\forall x > 0$.

b) $\text{dom} f =]0, +\infty[$

cresc./decresc: $f'(x) = 3 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{3x^2 + 1 - \ln x}{x^2} > 0$, pelo item a)

Portanto, f é estritamente crescente

concavidade: $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$

$f''(x) = 0$ se $x = e^{3/2}$

	0		$e^{3/2}$	
f''		−	0	+
f		∩		∪

$(e^{2/3}, 3e^{2/3} + \frac{2}{3e^{2/3}})$ é ponto de inflexão

assíntotas:

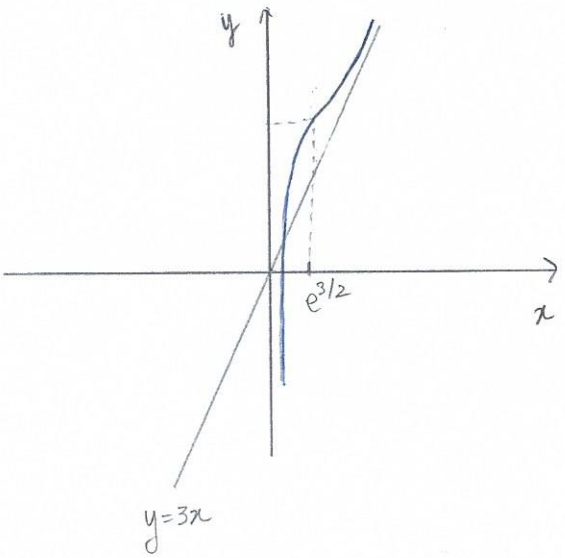
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 3x + \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ ($3x \to 0$, $\ln x \to -\infty$, $x \to 0^+$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \dfrac{\ln x}{x^2} = 3 \ (= m)$

$\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = 0 \right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 3x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

$y = 3x$ é assíntota para $x \to +\infty$



(1,5) **Questão 2.** Calcule, caso exista, o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos x}$.

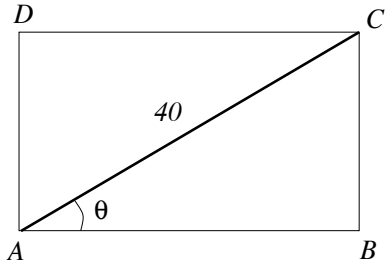
Temos que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}e^{\ln\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}e^{\cos x\ln\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)}=(*)$

Como $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)}{\frac{1}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)}{\sec x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{-5}{\frac{5\pi}{2}-5x}}{\sec x\,\mathrm{tg}x}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{-1}{\frac{\pi}{2}-x}}{\frac{\mathrm{sen}x}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos^2 x}{(x-\frac{\pi}{2})\,\mathrm{sen}x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-2\cos x\,\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}x+(x-\frac{\pi}{2})\cos x}=0.$

Portanto, $(*)=e^0=1$.

(2,0) **Questão 3.** A superfície lateral de um cilindro circular reto é obtida unindo-se os lados AD e BC de um retângulo $ABCD$. Dentre todos os retângulos de diagonal $40cm$, determine o ângulo θ (ver figura) que permite construir um cilindro de volume máximo.



Sejam r o raio da base e h a altura do cilindro.

$m(\overline{AB})=40\cos\theta$ e $m(\overline{BC})=40\,\mathrm{sen}\theta$

$m(\overline{AB})=2\pi r=40\cos\theta\Rightarrow r=\frac{40}{2\pi}\cos\theta$

$h=m(\overline{BC})=40\,\mathrm{sen}\theta$

$V=\pi r^2h=\pi\left(\frac{40}{2\pi}\cos\theta\right)^2 40\,\mathrm{sen}\theta,\ \ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$V(\theta)=\frac{40^3}{4\pi}\,\mathrm{sen}\theta\cos^2\theta$

$V'(\theta)=\frac{40^3}{4\pi}(\cos^3\theta-2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta)\Rightarrow V'(\theta)=\frac{40^3}{4\pi}\cos\theta(\cos^2\theta-2\,\mathrm{sen}^2\theta)$

$V'(\theta)=0\Leftrightarrow\cos\theta=0$ ou $1-\,\mathrm{sen}^2\theta-2\,\mathrm{sen}^2\theta\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$ ou $\theta=\,\mathrm{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

	$\nearrow$		$\searrow$		V
|	$+$	|	$-$	|	$1-3\,\mathrm{sen}^2\theta$
|	$+$	|	$-$	|	V'
0		$\mathrm{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{3}})$		$\frac{\pi}{2}$	

Portanto, para se ter o volume máximo, temos que ter $\theta=\,\mathrm{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{3}})$.

VEJA OUTRA SOLUÇÃO NA PROVA B.

(1,5) **Questão 4.** Use o TVM para mostrar que se $e < a < e^2$, então $a^{\ln a} - e < 4e^3(a - e)$.

Sejam $a \in]e, e^2[$ e $f(x) = x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$. A função f é contínua em $[e, a]$ e derivável em $]e, a[$. Pelo TVM, existe $c \in]e, a[$ tal que

$$\frac{a^{\ln a} - e^{\ln e}}{(\ln x)^2} = f'(c)(a - e).$$

$$f'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot 2\frac{\ln x}{x} = x^{\ln x} \cdot 2\frac{\ln x}{x}.$$

Temos que mostrar que para $c \in]e, a[$, $f'(c) < 4e^3$.

(1) Observe que $f'(x) > 0 \ \forall x > 1$. Assim, f é estritamente crescente em $[1, +\infty[$. Em particular, como $e < c < a < e^2$, temos que $f(c) < f(e^2)$ ou seja $c^{\ln c} < (e^2)^{\ln e^2} = e^4$

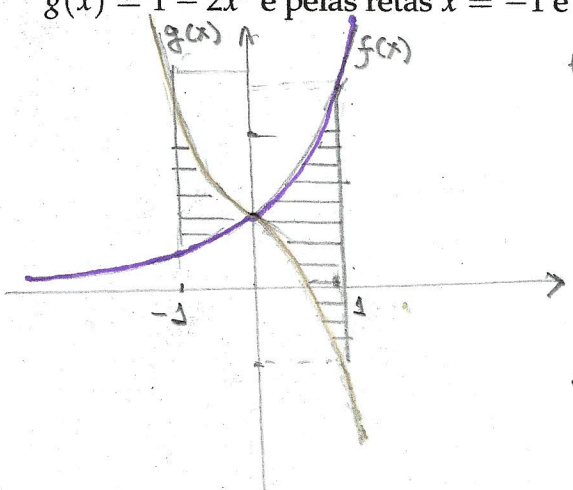
(2) Como $c < e^2$, $\ln c < \ln e^2 = 2$.

(3) Como $c > e$, temos que $\frac{1}{c} < \frac{1}{e}$.

Assim $e^{\ln c} \cdot 2 \cdot \frac{\ln c}{c} \underset{(1)}{<} 2e^4 \frac{\ln c}{c} \underset{(2)}{<} \frac{4e^4}{c} \underset{(3)}{<} 4e^3$.

Temos então $a^{\ln a} - e < 4e^3(a - e)$, como queríamos.

(1,5) **Questão 5.** Determine a área da figura plana delimitada pelos gráficos de $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1 - 2x^3$ e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.



A área A da região compreendida entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ e as retas $x = -1$ e $x = 1$ é

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\,dx$$

Se $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - 1 + 2x^3$, então $h'(x) = e^x + 6x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Como $h(0) = 0$, temos que $h(x) > 0$ se $x > 0$ e $h(x) < 0$ se $x < 0$.

Assim $|f(x) - g(x)| = \begin{cases} 1 - 2x^3 - e^x & \text{se } x \le 0 \\ e^x - 1 + 2x^3 & \text{se } x \ge 0. \end{cases}$

Logo $A = \int_{-1}^{0} (1 - 2x^3 - e^x)\,dx + \int_{0}^{1} (e^x - 1 + 2x^3)\,dx$

$$= \left(x - \frac{2x^4}{4} - e^x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(e^x - x + \frac{2x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} + e^{-1} + e - 1 + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{e} + e - 1.$$