Questão 2

(a) (1,5) Prove que para todos $a, b \in]0, +\infty[$ com $0 < a < b$ tem-se:

$$\frac{\text{arctg}(2b)}{\text{arctg}(2a)} < \frac{b}{a}.$$

Resolução: Dados $0 < a < b$, primeiramente observe que como $b > 0$ e $\text{arctg}(2a) > 0$ (já que $a > 0$), então a desigualdade

$$\frac{\text{arctg}(2b)}{\text{arctg}(2a)} < \frac{b}{a}$$

equivale à desigualdade

$$\frac{\text{arctg}(2b)}{b} < \frac{\text{arctg}(2a)}{a}.$$

Considere a função $f(x) = \frac{\text{arctg}(2x)}{x}$ definida no intervalo $]0, +\infty[$ e provemos que f é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$.

Temos que f é derivável em todos os pontos de seu domínio e

$$f'(x) = (\frac{2x}{1+4x^2} - \text{arctg}(2x)) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2x - (1+4x^2)\text{arctg}(2x)}{(1+4x^2)x^2}.$$

Como $x^2 > 0$ e $1 + 4x^2 > 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$, o sinal de $f'(x)$ é igual ao sinal de $g(x) = 2x - (1+4x^2)\text{arctg}(2x)$ para todo $x \in]0, +\infty[$. Note que g está definida em $\mathbb{R}$ e g é contínua e derivável em todos os pontos de seu domínio. Além disso, $g(0) = 0$ e

$$g'(x) = 2 - 8x \cdot \text{arctg}(2x) - (1+4x^2) \cdot \frac{2}{1+4x^2} = -8x \cdot \text{arctg}(2x).$$

Logo, $g'(x) < 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$, donde concluímos que g é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$. Portanto, g é estritamente negativa em $]0, +\infty[$ e, então, $f'(x) < 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$. Segue que f é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$, como queríamos.

(b) (1,0) Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0}(3x+\cos x)^{1/\operatorname{sen}(35x)}$.

Resolução: Temos que

$$\lim_{x\to 0}(3x+\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}35x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left((3x+\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}35x}}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(3x+\cos x)}{\operatorname{sen}35x}}.$$

Mas

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3x+\cos x)}{\operatorname{sen}35x}$$

é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, já que

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}35x = 0, \quad \lim_{x\to 0} 3x+\cos x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\ln(3x+\cos x) = \ln(1) = 0,$$

onde a penúltima igualdade segue do fato que a função $\ln(x)$ é contínua.

Portanto, pela Regra de L'Hospital, temos que

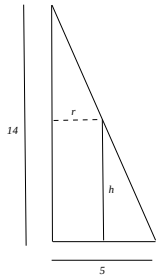
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3x+\cos x)}{\operatorname{sen}35x} = \lim_{x\to 0}\frac{(3-\operatorname{sen}x)}{(3x+\cos x)(35\cos 35x)} = \frac{3}{35}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}(3x+\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}35x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(3x+\cos x)}{\operatorname{sen}35x}} = e^{\frac{3}{35}},$$

onde a última igualdade segue do fato que a função exponencial é contínua.

4) (2,0) Considere um cone circular reto de altura 14 cm e raio 5 cm. Dentre os cilindros circulares retos que podem ser inscritos nesse cone (conforme figura abaixo), determine a altura h do cilindro que tem volume máximo.



Considerando os triângulos semelhantes na figura acima temos:

$$\frac{h}{14} = \frac{5-r}{5} \quad \text{ou seja,} \quad h = 14 - \frac{14}{5}r$$

O volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$.

Escrevendo h em função de r, temos a função $V : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$V(r) = \pi r^2(14 - \frac{14}{5}r) = 14\pi(r^2 - \frac{r^3}{5}).$$

E sua derivada é dada por: $V'(r) = 14\pi r(2 - \frac{3r}{5})$.

Temos que $V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = \frac{10}{3}$. (obs.: se $r = 0$ então $V = 0$)

Fazendo o estudo do sinal de V' temos:

	$\nearrow$		$\searrow$		V
|	$+$	|	$-$	|	V'
0		$\frac{10}{3}$		5	

Portanto, $r = \frac{10}{3}$ é o ponto de máximo de V então, para que o volume seja máximo, temos que ter $h = \frac{14}{3}cm$.

1. Seja $f(x) = \left(\frac{1+4\ln x}{x^4}\right) - 3$. Admita que $f'(x) = \frac{-16\ln x}{x^5}$.

   (a) (0,5) Determinar os intervalos abertos nos quais f é estritamente crescente e nos quais é estritamente decrescente;

   (b) (1,0) Estude a concavidade de f e determine , caso existam, os pontos de inflexão;

   (c) (0,5) Determine, caso existam, as assíntotas de f;

   (d) (1,0) Esboce o gráfico de f.

Note que o domínio de f é $]0, +\infty[$.

(a) Para determinar os intervalos pedidos basta estudarmos o sinal de f'. Logo temos a seguinte tabela:

	$0 < x < 1$	$1 < x$
sinal de lnx	-	+
sinal de $\frac{-16}{x^5}$	-	-
sinal de f'	+	-
crescimento e decrescimento de f	$\nearrow$	$\searrow$

Da tabela acima temos que f é estritamente crescente em $]0, 1[$ e f é estritamente decrescente em $]1, +\infty[$.

(b) Calculando f'' temos

$$f''(x) = \frac{-16}{x^{10}}\left(\frac{x^5}{x} - 5x^4\ln x\right) = \frac{-16x^4(1-5\ln x)}{x^{10}} = \frac{-16(1-5\ln x)}{x^6}$$

Notemos que

$$1 - 5\ln x > 0 \iff \frac{1}{5} > \ln x \iff \mathrm{e}^{1/5} > \mathrm{e}^{\ln x} = x > 0\,;$$

$$1 - 5\ln x < 0 \iff \frac{1}{5} < \ln x \iff \mathrm{e}^{1/5} < \mathrm{e}^{\ln x} = x\,;$$
$$1 - 5\ln x = 0 \iff \frac{1}{5} = \ln x \iff \mathrm{e}^{1/5} = \mathrm{e}^{\ln x} = x\,.$$

Logo temos a seguinte tabela:

	$0 < x < \mathrm{e}^{1/5}$	$\mathrm{e}^{1/5} < x$
sinal de $1 - 5\,lnx$	+	-
sinal de $\frac{-16}{x^6}$	-	-
sinal de f'	-	+
concavidade de f	$\bigcap$	$\bigcup$

Da tabela acima concluímos que f tem concavidade para baixo em $]0, \mathrm{e}^{1/5}[$ e f tem concavidade para cima em $]\mathrm{e}^{1/5}, +\infty[$. Como houve mudança de concavidade antes e depois do ponto $\mathrm{e}^{1/5}$ e f é contínua neste ponto temos que $\mathrm{e}^{1/5}$ é ponto de inflexão de f.

(c) Para determinar as assíntotas de f notemos que:

$$\lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{1}{x^4}(1 + 4\ln x) - 3\Big) = -\infty\,, \text{ pois } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+}(1 + 4\ln x) = -\infty\,.$$

Do cálculo acima temos que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical.

A seguir calcularemos $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1 + 4\ln x}{x^4}$.

Seja $l(x) = 1 + 4\ln x$ e $j(x) = x^4$. Como $\lim_{x\to+\infty} l(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} j(x) = +\infty$, temos que para calcular $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{l(x)}{j(x)}$ estamos no caso $\dfrac{\infty}{\infty}$ e assim podemos usar as Regras de L'Hospital.

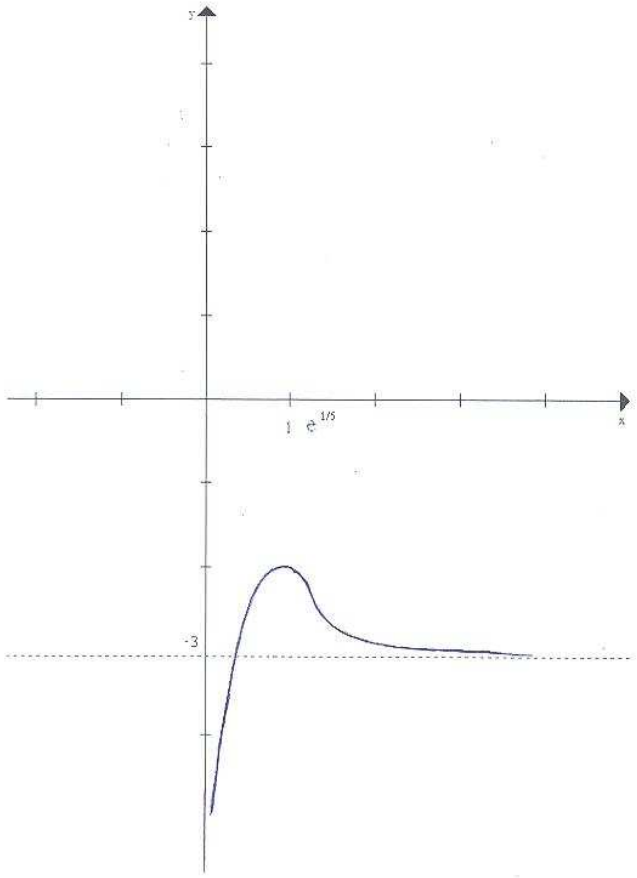
Notemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{l'(x)}{j'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}}{4x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4} = 0\,.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1 + 4\ln x}{x^4} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{l'(x)}{j'(x)} = 0\,,$$

e assim $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 - 3 = -3$.

Das contas acima concluímos que a reta $y = -3$ é uma assíntota horizontal.

(d) Note que $f(\mathrm{e}^{1/5}) = \dfrac{1+4\ln(\mathrm{e}^{1/5})}{\mathrm{e}^{4/5}} - 3 = \dfrac{9}{5\mathrm{e}^{4/5}} - 3 < 1 - 3 = -2$ e $f(1) = 1 - 3 = -2$. De todos os cálculos anteriores podemos afirmar que o gráfico de f tem o seguinte formato: