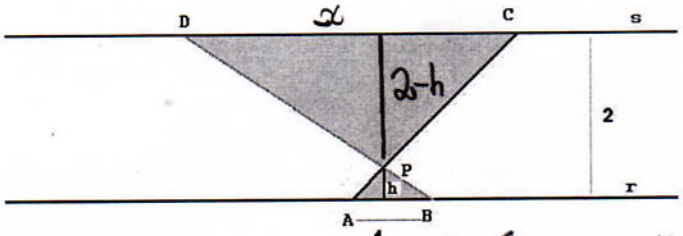
2. (a) **(2,0)** Na figura abaixo, r e s são retas paralelas, a distância entre elas é 2, C é um ponto **fixo** de s, A e B são pontos **fixos** de r e a distância entre eles é 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte AC e que a soma das áreas dos triângulos sombreados na figura seja mínima? E máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, encontre a altura h do triângulo ABP.



Outra solução na prova B.

Seja $DC = x$. Como o triângulo DCP é semelhante ao triângulo ABP, temos que

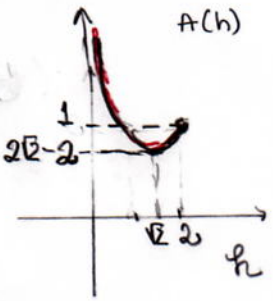
$$\boxed{\frac{x}{1} = \frac{2-h}{h}}.$$

A soma das áreas dos dois triângulos é:

$$A = \frac{x(2-h)}{2} + \frac{h \cdot 1}{2}.$$

Escrevendo a área em função de h, temos:

$$A(h) = \frac{1}{2}\left[\frac{(2-h)^2}{h} + h\right] = \frac{2}{h} - 2 + h.$$



Vamos então analisar a função $A(h)$ no intervalo $]0, 2]$ ($h=2$ significa $D=C=P$)

$$\lim_{h\to 0^+} A(h) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{2}{h} - 1 + h\right) = +\infty, \quad A(2) = 1.$$

$$A'(h) = -\frac{2}{h^2} + 1 = \frac{-2+h^2}{h^2}.$$

	0		$\sqrt{2}$		2
$A'(h)$	0	− −	0	+ + + +	
$A(h)$		↘		↗	2

Da análise acima temos que quando $h=\sqrt{2}$ a soma das áreas é mínima. Como $\lim_{h\to 0^+} A(h) = +\infty$, não temos ponto de máximo de $A(h)$. Assim, a soma das áreas é MÍNIMA quando $h=\sqrt{2}$ e NÃO tem MÁXIMO.

(b) **(1,5)** Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}}$$

$$(1+3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}} = e^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}\ln(1+3x)}$$

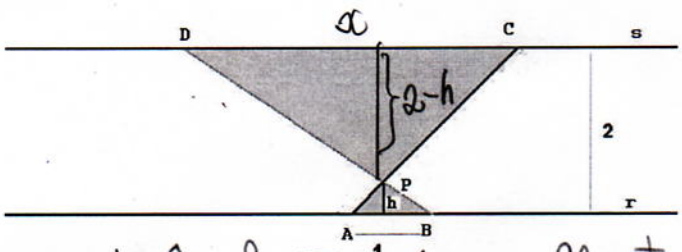
Seja $u = \dfrac{\ln(1+3x)}{\operatorname{arctg}(2x)}$. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+3x)}{\operatorname{arctg}(2x)} \to \dfrac{0}{0}$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{1+3x}}{\frac{2}{1+4x^2}} = \frac{3}{2}.$$

Como função exponencial é contínua, temos que

$$\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)}} = \lim_{u\to 3/2} e^u = \boxed{e^{3/2}}.$$

2. (a) **(2,0)** Na figura abaixo, r e s são retas paralelas, a distância entre elas é 2, C é um ponto **fixo** de s, A e B são pontos **fixos** de r e a distância entre eles é 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte AC e que a soma das áreas dos triângulos sombreados na figura seja mínima? E máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, encontre a altura h do triângulo ABP.



Outra solução na prova A.

Seja $DC = x$. Como o triângulo DCP é semelhante a ABP, temos que $\frac{x}{1} = \frac{2-h}{h}$. Logo $xh = 2-h \Rightarrow h(1+x) = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{1+x}$.

A soma das áreas dos triângulos DCP e ABP é

$$A = \frac{x(2-h)}{2} + \frac{h}{2}.$$

Escrevendo A em função de x temos

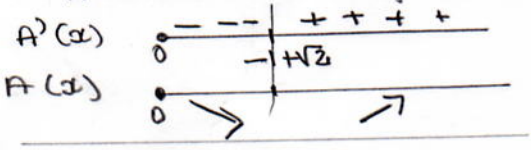
$$A(x) = \frac{1}{2}\left[2x - \frac{2x}{1+x} + \frac{2}{1+x}\right] = x - \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}.$$

Temos então que analisar a função $A(x)$ no intervalo $[0, +\infty[$. (Aqui $x=0$ tem o sentido de $C = D = P$.)

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right) = +\infty \quad (x\to+\infty,\ \frac{x}{1+x}\to 1,\ \frac{1}{1+x}\to 0) \quad \text{e} \quad A(0) = 1.$$

Agora $A'(x) = 1 - \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$.

Analisando o sinal de $A'(x)$ no intervalo $[0, +\infty[$ temos



Logo $x = -1+\sqrt{2}$ é ponto de mínimo de $A(x)$. A função $A(x)$ não tem máximo, pois $\lim_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$.

Quando $x = -1+\sqrt{2}$, $h = \sqrt{2}$, a soma das áreas é MÍNIMA. Não tem máximo.

(b) **(1,5)** Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}}$$

Temos que $(1+2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}} = e^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}\cdot \ln(1+2x)}$.

Seja $u = v(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$ ($\ln(1+2x)\to 0$, $\operatorname{arctg}(3x)\to 0$).

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{\operatorname{arctg}(3x)} \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{3}{1+9x^2}} = \frac{2}{3} \quad (2\to 2,\ 1+2x\to 1,\ 1+9x^2\to 1,\ 3\to 3)$$

Como a exponencial é uma função contínua,

$$\lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}} = \lim_{u\to 2/3} e^{u} = e^{2/3}.$$

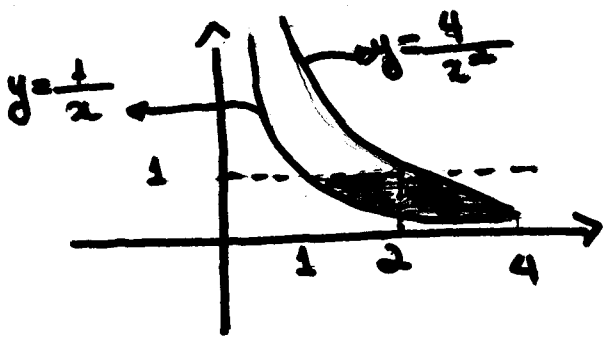
3. (a) **(1,5)** Calcule a área da região

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{4}{x^2}\right\}$$

$\frac{1}{x} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = 4$

$0 < x \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} \leq \frac{4}{x^2}$

$4 < x \Rightarrow \frac{4}{x^2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$



$(x > 0 \text{ e } \frac{1}{x} \leq 1) \Leftrightarrow x \geq 1$

$(x > 0 \text{ e } \frac{4}{x^2} \leq 1) \Leftrightarrow x \geq 2$

$$A_1 = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x\Big|_1^2 - \ln x\Big|_1^2$$

$$A_1 = 1 - \ln 2$$

$$A_2 = \int_2^4 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = -\frac{4}{x}\Big|_2^4 - \ln x\Big|_2^4$$

$$A_2 = -1 + 2 - \ln 4 + \ln 2$$

$$A_2 = 1 - \ln 2$$

$$A_1 + A_2 = 2 - 2\ln 2$$

Resposta: $2 - 2\ln 2$

(b) Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + ex + 1$.

i. **(1,0)** Quantas raízes reais distintas tem a equação $f''(x) = 0$?

ii. **(0,5)** Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três raízes reais distintas. **Mencione os teoremas utilizados.**

Veja prova B

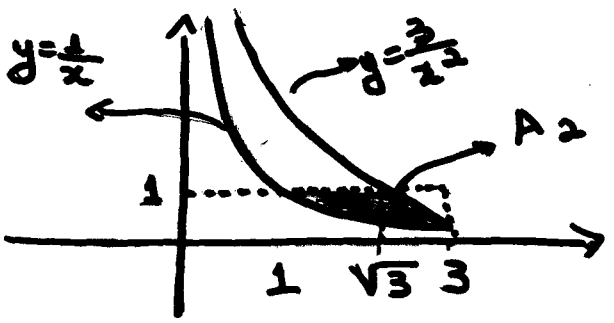
3. (a) **(1,5)** Calcule a área da região

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, y \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x^2}\right\}$$

$\frac{1}{x} = \frac{3}{x^2} \Leftrightarrow x = 3$

$0 < x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$

$3 < x \Rightarrow \frac{3}{x^2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$



$(x>0 \text{ e } \frac{1}{x} \leq 1) \Leftrightarrow x \geq 1$

$(x>0 \text{ e } \frac{3}{x^2} \leq 1) \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$

$$A_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x\Big|_1^{\sqrt{3}} - \ln x\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$A_1 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3} + \ln 1$$

$$A_1 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3}$$

$$A_2 = \int_{\sqrt{3}}^{3} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{-3}{x}\Big|_{\sqrt{3}}^{3} - \ln x\Big|_{\sqrt{3}}^{3}$$

$$A_2 = -1 + \frac{3}{\sqrt{3}} - \ln 3 + \ln\sqrt{3}$$

$$A_2 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3}$$

$$A_1 + A_2 = 2(\sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3})$$

Resposta: $2(\sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3})$ (ou $2\sqrt{3} - 2 - \ln 3$)

(b) Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + ex + 1$.

i. **(1,0)** Quantas raízes reais distintas tem a equação $f''(x) = 0$?

ii. **(0,5)** Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três raízes reais distintas. **Mencione os teoremas utilizados.**

i) $f'(x) = 7x^6 + 3\pi x^2 - 16x + e$

$f''(x) = 42x^5 + 6\pi x - 16$ $\quad f'''(x) = 210x^4 + 6\pi$

Como $f'''(x) > 0$ para todo x, f'' é estritamente crescente e portanto a equação $f''(x) = 0$ tem, no máximo, uma raiz real. Mas $f''(0) = -16 < 0$ e $f''(1) = 42 + 6\pi - 16 > 60 - 16 > 0$ pelo Teorema do Valor Intermediário, existe c em $]0,1[$ tal que $f''(c) = 0$. Assim, a equação $f''(x) = 0$ tem uma (e apenas uma) raiz real

ii) $f(-1) = -1 - \pi - 8 - e + 1 = -\pi - 8 - e < 0$ pois $e + \pi < 6 < 8$

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = 1 + \pi - 8 + e + 1 = 2 + e + \pi - 8 < 2 + 6 - 8 < 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^7 \left(1 + \frac{\pi}{x^4} - \frac{8}{x^5} + \frac{e}{x^6} + 1\right) = +\infty$ e

portanto existe $M > 1$ tal que $f(M) > 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, três raízes reais distintas x_1, x_2, x_3, com $-1 < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < M$. Vamos mostrar que a equação $f(x) = 0$ não pode ter mais do que três raízes reais distintas. Em i), vimos que f'' se anula apenas em um ponto. Aplicando o TVM para f', concluímos que f' se anula, no máximo, duas vezes (De fato, se existissem a, b e c com $a < b < c$ tais que $f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0$ então f'' se anularia uma vez em $]a, b[$ e uma vez em $]b, c[$ e, portanto, se anularia pelo menos duas vezes) Aplicando o TVM novamente, desta vez para f, concluímos que f se anula, no máximo, três vezes, já que f' se anula, no máximo duas vezes.

Observação: f, f', f'' são deriváveis em $\mathbb{R}$ e, portanto, são contínuas em $\mathbb{R}$. Assim f, f', f'' verificam as hipóteses do T.V.I. e do T.V.M. em qualquer intervalo $[a, b]$.

1. **(3,5)** Seja $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

   (a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

   (b) Verifique que $f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\dfrac{2x^2-4x+a}{x^5}\right)$. Determine a e estude a concavidade de f.

   (c) Calcule os limites necessários e esboce o gráfico de f.

a) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) = e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} + e^{-1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1-x}{x^3}\right)$

$f'(x)=0 \iff x=1$

	0		1	
$1-x$	$+$	$\|\|$	$+$	$-$
x^3	$-$	$\|\|$	$+$	$+$
f'	$-$	$\|\|$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$	$\searrow$

f é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$ e em $[1,+\infty[$

f é estritamente crescente em $]0,1]$.

$(1,\frac{1}{e})$ é ponto de máximo local

b) $f''(x) = e^{-1/x}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) + e^{-1/x}\left(-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^3}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^4}-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^3}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{2x^3-4x+1}{x^5}\right)$ $\boxed{a=1}$

$f''(x)=0 \iff 2x^2-4x+1=0 \quad \therefore x = 1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

	0		$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2x^3-4x+1$	$+$	$\|\|$	$+$	$-$	$+$	
x^5	$-$	$\|\|$	$+$	$+$	$+$	
f''	$-$	$\|\|$	$+$	$-$	$+$	
f	$\cap$	$\|\|$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

f tem concavidade para baixo em $]-\infty,0[$ e em $]1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}[$

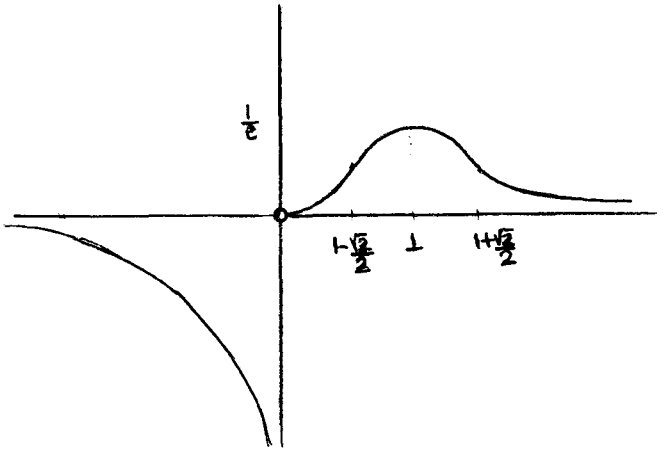
f tem concavidade para cima em $]0,1-\frac{\sqrt{2}}{2}[$ e em $]1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty[$.

$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2e^{\frac{2}{\sqrt{2}-2}}}{2-\sqrt{2}}\right)$ e $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2e^{\frac{-2}{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2}}\right)$ são pontos de inflexão

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-1/x}}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-1/x}}{x}$ $\left(\text{pois } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} \text{ e } \lim_{x\to+\infty}e^{-1/x}=1=\lim_{x\to-\infty}e^{-1/x}\right)$

$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-1/x}}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to0^+}e^{-1/x} = 0.$



1. **(3,5)** Seja $f(x) = \dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

   (a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

   (b) Verifique que $f''(x) = e^{\frac{2}{x}}\left(\dfrac{2x^2+8x+a}{x^5}\right)$. Determine a e estude a concavidade de f.

   (c) Calcule os limites necessários e esboce o gráfico de f.

a) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) = e^{\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x} + e^{2/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{2/x}\left(-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) = e^{2/x}\left(\frac{-2-x}{x^3}\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$

	-2		0
$-2-x$	+	−	−
x^3	−	−	+
f'	−	+	−
f	↘	↗	↘

f é estritamente crescente em $[-2,0[$
e estritamente decrescente em $]-\infty,-2]$ e em $]0,+\infty[$.
$\left(-2,-\frac{1}{2e}\right)$ é ponto de mínimo local.

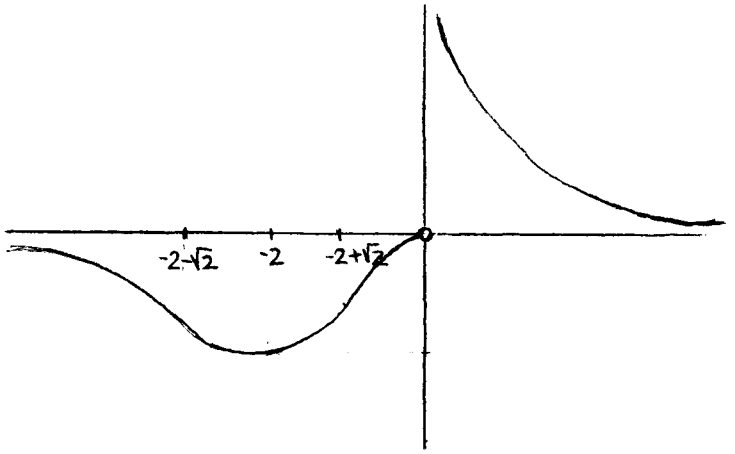
b) $f''(x) = e^{2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) + e^{2/x}\left(\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x^3}\right) = e^{2/x}\left(\frac{4}{x^5}+\frac{2}{x^4}+\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x^3}\right) = e^{2/x}\left(\frac{2x^2+8x+4}{x^5}\right)$ $\boxed{a=4}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x+2=0 \therefore x=-2\pm\sqrt{2}$.

	$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		0
$2x^2+8x+4$	+	−	+		+
x^5	−	−	−		+
f''	−	+	−		+
f	∩	∪	∩		∪

f tem concavidade p/ baixo em $]-\infty,-2-\sqrt{2}[$ e em $]-2+\sqrt{2},0[$
f tem concavidade p/ cima em $]-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}[$ e em $]0,+\infty[$
$\left(-2-\sqrt{2}, \dfrac{e^{\frac{2}{-2-\sqrt{2}}}}{-2-\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-2+\sqrt{2}, \dfrac{e^{\frac{2}{-2+\sqrt{2}}}}{-2+\sqrt{2}}\right)$ são pontos de inflexão

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2/x}}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2/x}}{x}$ (pois $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ e $\lim_{x\to+\infty}e^{2/x}=1=\lim_{x\to-\infty}e^{2/x}$)

$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{2/x}}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2/x}}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{2}{x}}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{2}{x}}\left(\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to0^-}-\frac{e^{\frac{2}{x}}}{2} = 0.$