Questão 1: (4,0) Seja $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5}$.

a) Determine o domínio de f e, caso existam, as assíntotas.

b) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, bem como os pontos de máximo e de mínimo locais.

c) Mostre que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão $\alpha > 5$. Estude a concavidade de f em função de α.

d) Use (a), (b) e (c) para esboçar o gráfico de f.

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{5}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\sqrt{5}\}$

$-\sqrt{5} \qquad \sqrt{5}$

$\lim_{x \to \sqrt{5}^+} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x \to \sqrt{5}^+} \underbrace{(x-3)}_{\to \sqrt{5}-3 \,<0} \underbrace{\frac{1}{(x+\sqrt{5})}}_{\to 2\sqrt{5}} \underbrace{\frac{1}{(x-\sqrt{5})}}_{\to 0,\ >0} = -\infty$

Analogamente,

$\lim_{x \to \sqrt{5}^-} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x \to \sqrt{5}^-} \underbrace{\frac{(x-3)}{(x+\sqrt{5})}}_{<0} \underbrace{\frac{1}{x-\sqrt{5}}}_{<0,\ \to 0} = +\infty$

Logo a reta $x = \sqrt{5}$ é uma assíntota vertical.

$\lim_{x \to -\sqrt{5}^+} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x \to -\sqrt{5}^+} \underbrace{\frac{x-3}{x-\sqrt{5}}}_{\to -2\sqrt{5}} \underbrace{\frac{1}{x+\sqrt{5}}}_{>0,\ \to 0} = +\infty$

$\lim_{x \to -\sqrt{5}^-} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x \to -\sqrt{5}^-} \underbrace{\frac{x-3}{x-\sqrt{5}}}_{>0} \underbrace{\frac{1}{x+\sqrt{5}}}_{\to 0,\ <0} = -\infty$

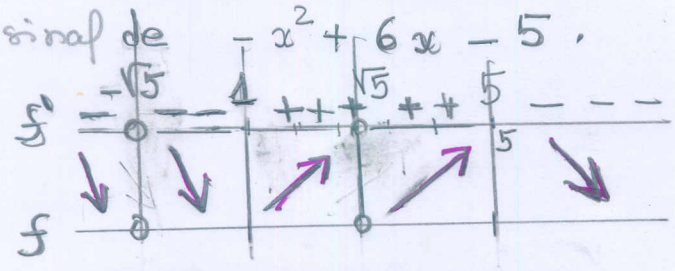
A reta $x = -\sqrt{5}$ também é uma assíntota vertical.

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-3}{x^2-5} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(1-3/x)}{x^2(1-5/x^2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \frac{\overbrace{(1-3/x)}^{\to 0}}{\underbrace{(1-5/x^2)}_{>0}} = 0$

Logo a reta $y = 0$ (eixo x) é uma assíntota horizontal. Não existe assíntota inclinada.

(b) $f'(x) = \dfrac{x^2-5-(x-3)2x}{(x^2-5)^2} = \dfrac{-x^2+6x-5}{(x^2-5)^2} \quad (x \neq \pm\sqrt{5})$

Como $(x^2-5)^2 > 0 \ \forall x$, o sinal de f' é determinado pelo sinal de $-x^2+6x-5$.



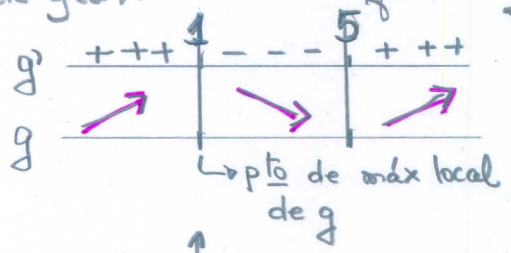
$x = 1$ é ponto de mínimo local e $x = 5$ é ponto de máximo local

(c) $f''(x) = \dfrac{(-2x+6)(x^2-5)^2 - (-x^2+6x-5)\,2(x^2-5)2x}{(x^2-5)^4}$

$$f''(x) = \frac{(-2x+6)(x^2-5) + 4x(x^2-6x+5)}{(x^2-5)^3}$$

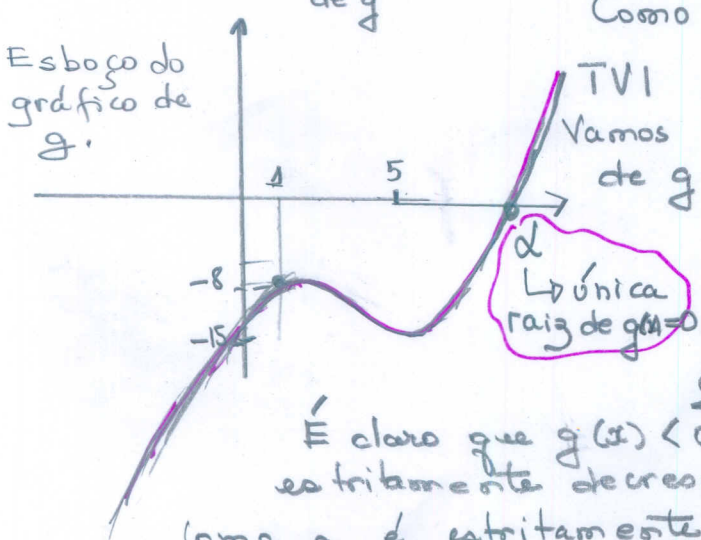
$$= \frac{2x^3 - 18x^2 + 30x - 30}{(x^2-5)^3} = \frac{2(x^3-9x^2+15x-15)}{(x^2-5)^3}$$

O sinal de $f''(x)$ é determinado pelo sinal de x^2-5 e de $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 15$. Vamos estudar o sinal de $g(x)$. Temos que $g'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2-6x+5)$.



$g(1) = -8$ e $g(5) < -8$, já que g é estritamente decrescente em $]1,5[$. Em particular, $g(5) < 0$.

Como $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, temos, pelo TVI que g tem uma raiz $\alpha > 5$. Vamos ver que essa é a única raiz de g. Temos que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, g estritamente crescente em $]-\infty, 1[$, e $g(1) < 0$. Logo $g(x) < 0 \ \forall x \in]-\infty, 1[$.

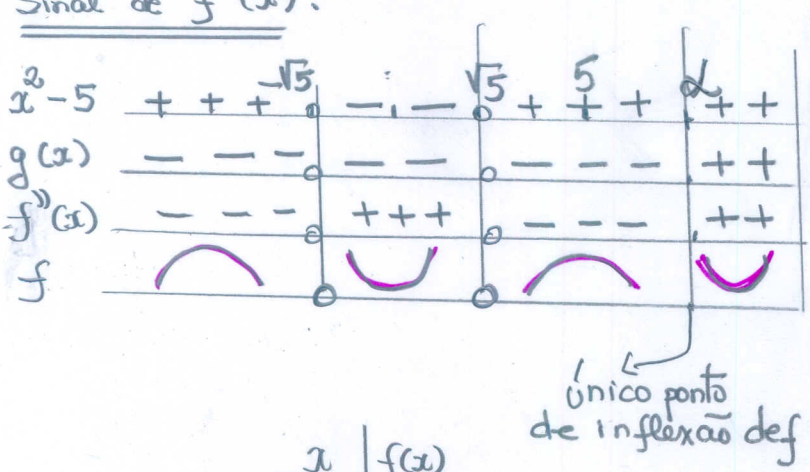


É claro que $g(x) < 0$ se $x \in]1,5[$ já que g é estritamente decrescente nesse intervalo e $g(1) < 0$.

Como g é estritamente crescente em $]5, +\infty[$ e $g(5) < 0$, $g(\alpha) = 0$, temos que $g(x) < 0$ em $]5, \alpha[$. Como $g(\alpha) = 0$ e g é estritamente crescente se $x > \alpha$, temos que $g(x) > 0 \ \forall x > \alpha$.

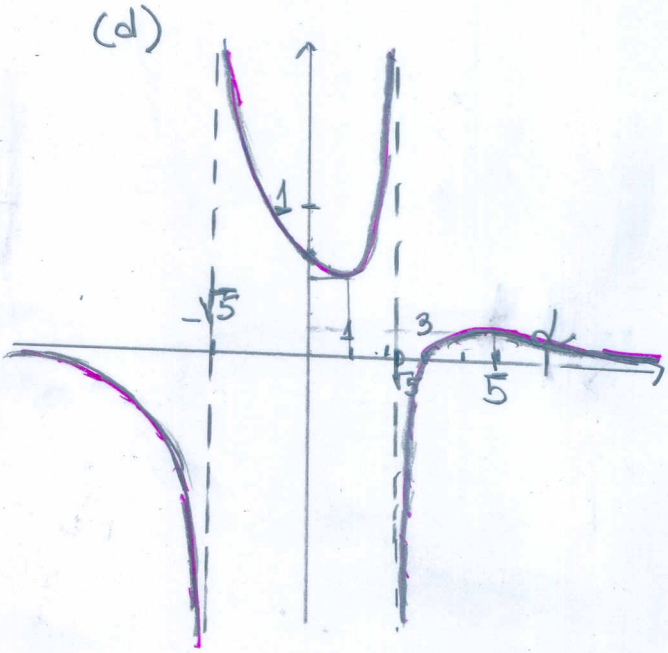
(É claro que usamos que g é CONTÍNUA.)

Sinal de $f''(x)$:



x	$f(x)$
0	3/5
1	1/2
5	1/10
2	0

(d)

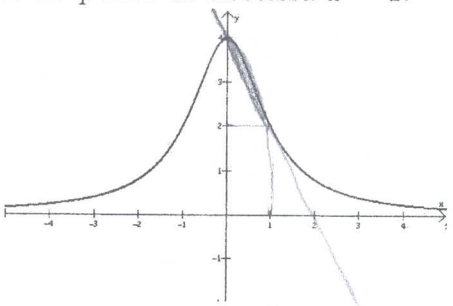


A

Questão 2: (Os dois itens são independentes.)

(2,0) a) Calcule a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$ (figura abaixo) e sua reta tangente no ponto de abscissa $x = 1$.

$f'(x) = -\dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$



(1,0) b) Calcule, caso existam, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/(x^2-1)}$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{1/(x^2-1)}$.

a) Reta tangente: $\dfrac{y-f(1)}{x-1} = f'(1) \therefore \dfrac{y-2}{x-1} = -2 \therefore y-2 = -2x+$

$\boxed{y = -2x+4}$

$A = \int_0^1 \left(\dfrac{4}{x^2+1} + 2x - 4\right) dx = \left(4\operatorname{arctg} x + x^2 - 4x\right)\Big|_0^1 = \pi + 1 - 4 = \pi -$

b) $(\ln x)^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{\ln(\ln x)}{x^2-1}}$

$\to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(\ln x)\cdot x \cdot 2x} = 0$

$\frac{\infty}{\infty}$ L'H

$\to \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(\ln x)}{x^2-1} = -\infty$,

pois $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(\ln x) = \lim\limits_{u\to 0} \ln u = -\infty$.

$u = \ln x$.

e $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1) = 0$ e $x^2-1 > 0$ se $x > 1$.

Daí

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x^2-1}} = e^0 = 1$ e

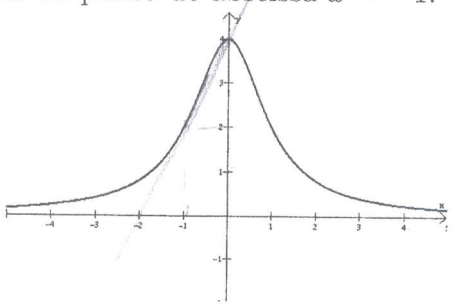
$\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$

Questão 2: (Os dois itens são independentes.)

B

(2,0) a) Calcule a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$ (figura abaixo) e sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$.

$f'(x) = -\dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$



(1,0) b) Calcule, caso existam, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/(x^3-1)}$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{1/(x^3-1)}$.

a) Reta tangente: $\dfrac{y - f(-1)}{x+1} = f'(-1) = \dfrac{8}{4} = 2$

$y - 2 = 2x + 2 \quad \therefore \quad y = 2x + 4$

$$A = \int_{-1}^{0} \left[\frac{4}{x^2+1} - (2x+4)\right] dx = \left(4\,\text{arctg}\,x - x^2 - 4x\right)\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= -\left(4\,\text{arctg}(-1) - 1 + 4\right) = 4\,\text{arctg}\,1 - 3 = \pi - 3$$

b) $(\ln x)^{1/(x^3-1)} = e^{\frac{\ln(\ln x)}{x^3-1}}$

$\to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(\ln x)\, x \cdot 2x^2} = 0$

$\uparrow$ L'H. $\frac{\infty}{\infty}$

$\to \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(\ln x)}{x^3-1} = -\infty$,

pois $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(\ln x) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty \quad (u = \ln x)$

e $\lim\limits_{x\to 1} (x^3 - 1) = 0$ e $x^3 - 1 > 0$ se $x > 1$

Daí:

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x^3-1}} = e^0 = 1$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(\ln x)}{x^3-1} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$

Questão 3-a): (1,5) Prove que $\operatorname{tg}(x) \geq x + \dfrac{x^3}{3}$, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Resolução:

Considere a função $g(x) = \operatorname{tg}(x) - x - \dfrac{x^3}{3}$, com $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Como $g(0) = 0$, basta mostrar que g é estritamente crescente, ou seja, que $g'(x) > 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

De fato, $g'(x) = \sec^2(x) - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2(x) - x^2 = (\operatorname{tg}(x) - x)(\operatorname{tg}(x) + x)$.

Como $\operatorname{tg}(x) > 0$ e $x > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, basta mostrar que $h(x) = \operatorname{tg}(x) - x > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Mas $h(0) = 0$ e $h'(x) = \sec^2(x) - 1 = \operatorname{tg}^2(x) > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. cqd

Questão 3-b): (1,5) Calcule, se existir, $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x+1)}\right]$.

Resolução:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x \ln(x+1)} =$$

Como a indeterminada é do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando as regras de L'Hospital, temos:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1-x-1}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - x - 1}{(x+1)\ln(x+1) + x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{(x+1)\ln(x+1) + x}$$

Como a indeterminada é do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando as regras de L'Hospital, temos:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1 + \ln(x+1) + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Questão 3-a): (1,5) Prove que $\text{tg}(x) \geq x + \dfrac{x^3}{3}$, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Resolução:

Considere a função $g(x) = \text{tg}(x) - x - \dfrac{x^3}{3}$, com $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Como $g(0) = 0$, basta mostrar que g é estritamente crescente, ou seja, que $g'(x) > 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

De fato, $g'(x) = \sec^2(x) - 1 - x^2 = \text{tg}^2(x) - x^2 = (\text{tg}(x) - x)(\text{tg}(x) + x)$.

Como $\text{tg}(x) > 0$ e $x > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, basta mostrar que $h(x) = \text{tg}(x) - x > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Mas $h(0) = 0$ e $h'(x) = \sec^2(x) - 1 = \text{tg}^2(x) > 0$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. cqd

Questão 3-b): (1,5) Calcule, se existir, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+1)} - \dfrac{1}{x}\right]$.

Resolução:

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+1)} - \dfrac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(x+1)}{x\ln(x+1)} =$

Como a indeterminada é do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando as regras de L'Hospital, temos:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{(x+1)\ln(x+1)+x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(x+1)\ln(x+1)+x}$$

Como a indeterminada é do tipo $\frac{0}{0}$, aplicando as regras de L'Hospital, temos:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \ln(x+1) + 1} = \frac{1}{2}.$$

Questão 1: (4,0) Seja $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3}$.

A

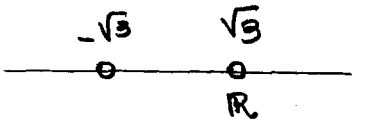
a) Determine o domínio de f e, caso existam, as assíntotas.

b) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, bem como os pontos de máximo e de mínimo locais.

c) Mostre que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão $\alpha > 3$. Estude a concavidade de f em função de α.

d) Use (a), (b) e (c) para esboçar o gráfico de f.

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\sqrt{3}\}$



$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{x-2}{x-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{3}} = +\infty$$

($\frac{x-2}{x-\sqrt{3}} \to -(\sqrt{3}+2) < 0$; $\frac{1}{x+\sqrt{3}} > 0$)

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \frac{x-2}{x-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{3}} = -\infty$$

($\frac{x-2}{x-\sqrt{3}} \to -2\sqrt{3} < 0$; $\frac{1}{x+\sqrt{3}} \to 0, <0$)

Logo a reta $x = -\sqrt{3}$ é assíntota vertical.

Analogamente,

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{x-2}{x+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x-\sqrt{3}} = -\infty$$

($\frac{x-2}{x+\sqrt{3}} \to \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}} < 0$; $\frac{1}{x-\sqrt{3}} \to 0, >0$)

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^-} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to \sqrt{3}^-} \frac{x-2}{x+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x-\sqrt{3}} = +\infty$$

($\frac{x-2}{x+\sqrt{3}} < 0$; $\frac{1}{x-\sqrt{3}} \to 0, <0$)

A reta $x = \sqrt{3}$ também é assíntota vertical.

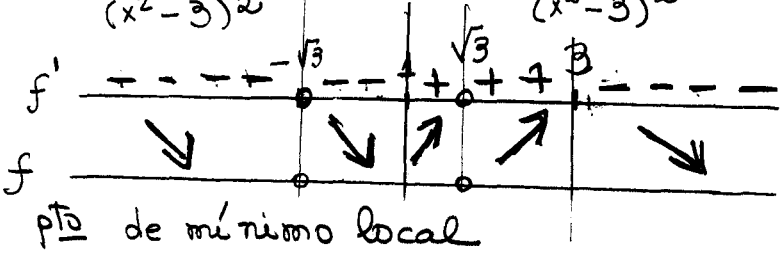
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(1-2/x)}{x^2(1-3/x^2)} = 0$$

($1-2/x \to 1$; $1-3/x^2 \to 1$; $\frac{x}{x^2} \to 0$)

Logo a reta $y = 0$ (eixo x) é assíntota horizontal.

Não existem assíntotas inclinadas.

(b) $f'(x) = \dfrac{x^2-3-(x-2)2x}{(x^2-3)^2} = \dfrac{-x^2+4x-3}{(x^2-3)^2}$ (para $x \in D_f$)



$x = 1$ pto de mínimo local

$x = 3$ pto de máximo local

(c) $f''(x) = \dfrac{(-2x+4)(x^2-3)^2 - (-x^2+4x-3)2(x^2-3)2x}{(x^2-3)^4}$

$$f''(x) = \frac{(-2x+4)(x^2-3) + 4x(x^2-4x+3)}{(x^2-3)^3}$$

Logo $f''(x) = \dfrac{6x^3 - 12x^2 + 18x - 12}{(x^2-3)^3} = \dfrac{2(x^3 - 6x^2 + 9x - 6)}{(x^2-3)^3}$ A

O sinal de $f''(x)$ é determinado pelos sinais de $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ e (x^2-3).

Vamos analisar o sinal de $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$.

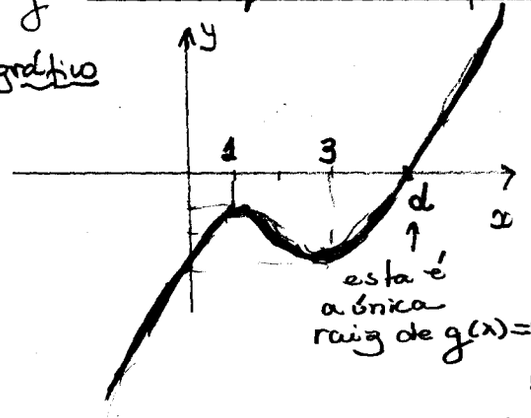
$g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$.

g'	+ + +	1	− − −	3	+ + +
g	↗		↘		↗

x	$g(x)$
1	−2
3	−6

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$

Esboço do gráfico de g



Como $x = 1$ é ponto de máximo local de $g(x)$, $g(1) < 0$ e g é estritamente decrescente em $]1,3[$, temos que $g(x) < 0 \ \forall\, x \in]-\infty, 3[$.

Agora, $g(3) < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, temos, pelo TVI que existe $\alpha > 3$ tal que $g(\alpha) = 0$.

Como g é estritamente crescente em $]3,+\infty[$, temos que $g(x) > 0 \ \forall\, x > \alpha$.

Também é claro que $g(x) < 0 \ \forall\, x \in]3,\alpha[$.

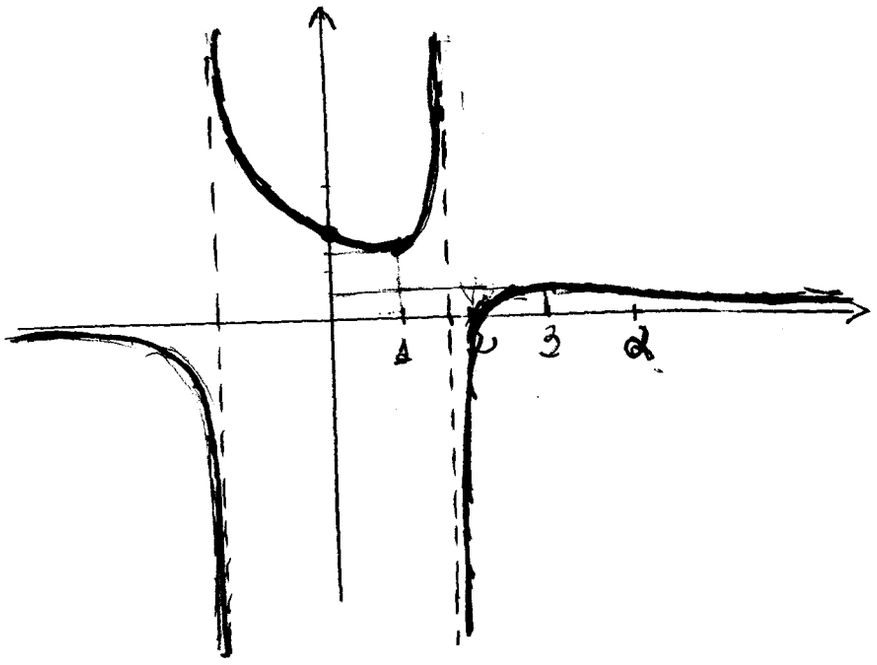
Logo $g(x) < 0 \ \forall\, x < \alpha$.

(Usamos todo o tempo que g é CONTÍNUA)

Sinal de $f''(x)$:

x^2-3	+ +	$-\sqrt{3}$	− −	$\sqrt{3}$	+ +	α	+ + +
$g(x)$	− −	−	− −		+ +		+ + +
f''	− −	+	− −		+		+
	∩		∪		∩		∪

↳ α é o único ponto de inflexão de f e $\alpha > 3$.

(d)

x	$f(x)$
0	2/3
1	1/2
3	1/6
2	0