A

Questão 1: Considere a parábola $y = bx^2$, com $b \geq 1$. Faça um esboço da região compreendida entre a parábola e a reta $y = x$, com $0 \leq x \leq 1$.

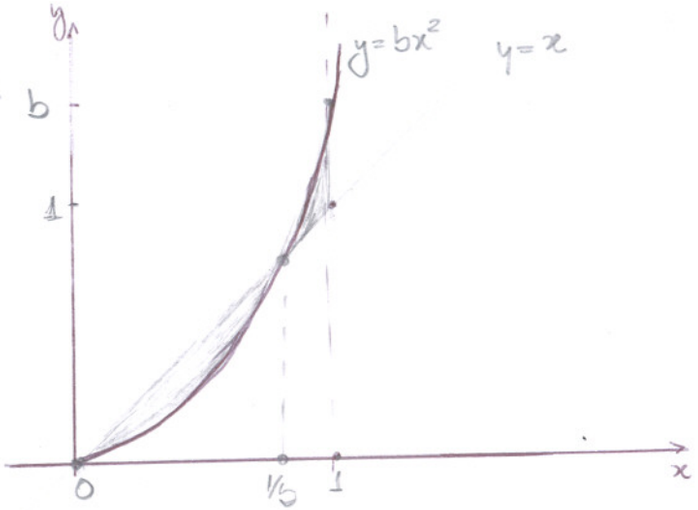
a) (1,5) Calcule a área desta região em termos de b.

b) (1,5) Determine, se existir, $b \in [1, 3]$ para o qual a área é máxima. Justifique.

a) Área $= \int_0^{1/b} [x - bx^2]\,dx + \int_{1/b}^{1} [bx^2 - x]\,dx$

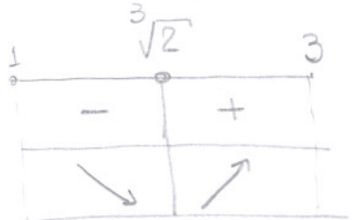
$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{bx^3}{3}\right]_0^{1/b} + \left[\frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1/b}^{1} =$

$= \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$



b) A função $A(b) = \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$ é contínua no intervalo fechado $[1, 3]$. Pelo Teorema de Weierstrass, A tem máximo e mínimo neste intervalo.

$A'(b) = \frac{-2}{3b^3} + \frac{1}{3}$



O máximo de A, com $b \in [1,3]$ pode ser $A(1)$ ou $A(3)$.

$A(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$A(3) = \frac{1}{27} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{29}{54}$

Ponto de máximo de A é $(3, 29/54)$

Questão 1: Considere a parábola $y = bx^2$, com $b \geq 1$. Faça um esboço da região compreendida entre a parábola e a reta $y = x$, com $0 \leq x \leq 1$.

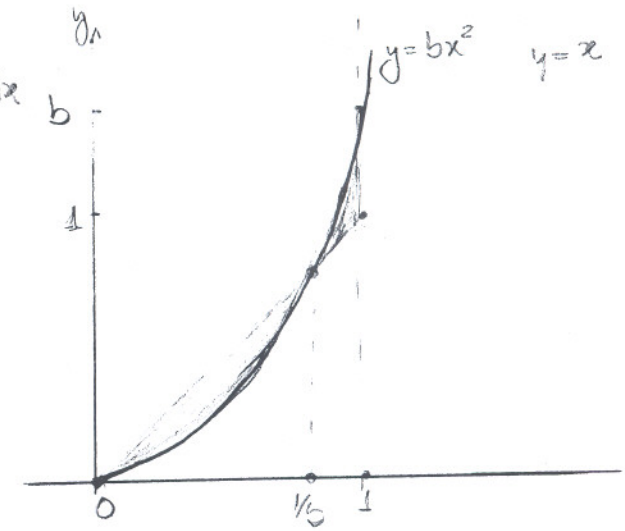
a) (1,5) Calcule a área desta região em termos de b.

b) (1,5) Determine, se existir, $b \in [1, 2]$ para o qual a área é máxima. Justifique.

a) Área $= \int_0^{1/b} [x - bx^2]\,dx + \int_{1/b}^{1} [bx^2 - x]\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{bx^3}{3}\right]_0^{1/b} + \left[\frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1/b}^{1} =$

$= \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$



b) A função $A(b) = \frac{1}{3b^2} + \frac{b}{3} - \frac{1}{2}$ é contínua no intervalo fechado $[1,2]$. Pelo Teorema de Weierstrass, A tem máximo e mínimo no intervalo.

$A'(b) = \frac{-2}{3b^3} + \frac{1}{3} = \frac{-2 + b^3}{3b^3}$

	1		$\sqrt[3]{2}$		2
A'		−	0	+	
A		↘		↗	

$b = \sqrt[3]{2}$ é mínimo e o máximo será $b = 1$ ou $b = 2$

$A(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$A(2) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Logo, $(2, 1/4)$ é o máximo para $A(b)$ com $b \in [1,2]$.

Questão 2A. $f(x) = x e^{4-x^2}$.

1. Intervalos de crescimento. Como $f'(x) = e^{4-x^2}(1-2x^2)$, segue que
   (a) f é estritamente crescente em $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.
   (b) f é estritamente decrescente em $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[$ e em $]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.
2. Ponto de máximo local: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Ponto de mínimo local: $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Concavidade. Como $f''(x) = e^{4-x^2} 2x(2x^2-3)$, temos que
   (a) f tem concavidade para cima em $]-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0[$ e em $]\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty[$.
   (b) f tem concavidade para baixo em $]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}[$ e em $]0, \sqrt{\frac{3}{2}}[$.
4. Pontos de inflexão: $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0 e $\sqrt{\frac{3}{2}}$.
5. (a) $\lim_{x\to+\infty} x e^{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \to +\infty}{e^{x^2-4} \to +\infty}$

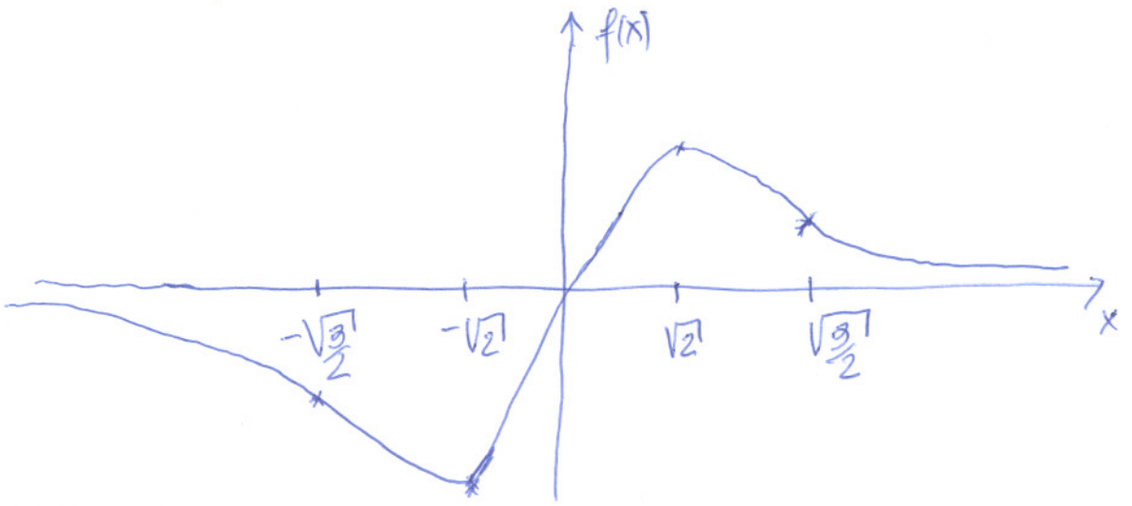
   Obs 1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x e^{x^2-4}} = 0$.

   Portanto pela regra de L'Hospital, $\lim_{x\to+\infty} x e^{4-x^2} = 0$

   (b) $\lim_{x\to-\infty} x e^{4-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \to -\infty}{e^{x^2-4} \to +\infty}$

   Obs 1. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x e^{x^2-4}} = 0$

   Conseguentemente pela regra de L'Hospital $\lim_{x\to-\infty} x e^{4-x^2} = 0$



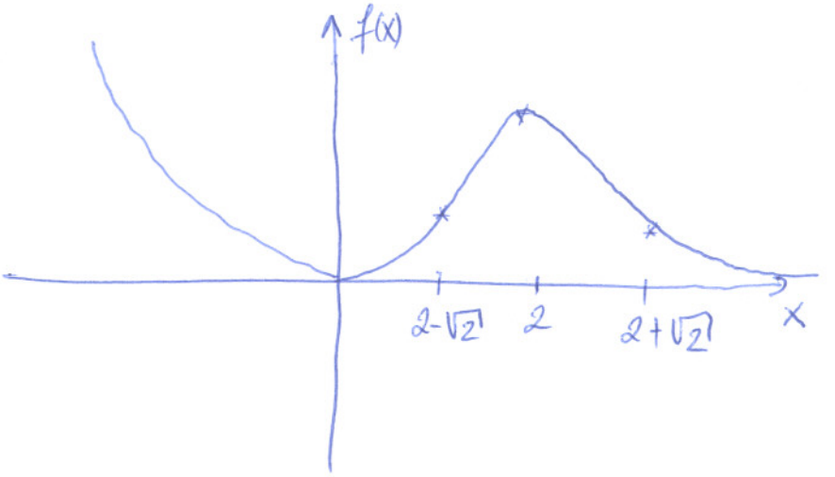
Questão 2 B. $f(x) = x^2 e^{4-x}$

1. Intervalos de crescimento. Como $f'(x) = e^{4-x}(2x - x^2)$, segue que
   (a) f é estritamente crescente em $]0, 2[$.
   (b) f é estritamente decrescente em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$.
2. Ponto de máximo local: 0.
   Ponto de mínimo local: 2.
3. Concavidade. Como $f''(x) = e^{4-x}[x^2 - 4x + 2]$, temos que
   (a) f tem concavidade para cima em $]2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}[$.
   (b) f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 2-\sqrt{2}[$ e em $]2+\sqrt{2}, +\infty[$.
4. Pontos de inflexão: $2-\sqrt{2}$ e $2+\sqrt{2}$.
5. (a) $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{4-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \to +\infty}{e^{x-4} \to +\infty}$

   obs 1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x \to +\infty}{+e^{x-4} \to +\infty}$ obs 2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^{x-4}} = 0$

   Portanto pela regra de L'Hospital, $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{4-x} = 0$

   (b) $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{4-x} \to +\infty = +\infty$ ($x^2 \to +\infty$)



MAT2453 - POLI
Gabarito - P2 - Questão 3
Prova Tipo A

(a) Temos que $(1+3x)^{1/\arctan x} = e^{\frac{\ln(1+3x)}{\arctan x}}$. Além disso, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{\frac{1}{1+x^2}} = 3\,.$$

Logo, $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\arctan x}} = e^3$.

(b) Como $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 3 \geq 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \leq \frac{1}{3}\,,$$

para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Pelo teorema do valor médio, concluímos que dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b-a) \leq \frac{1}{3}(b-a)\,,$$

como queríamos.

MAT2453 - POLI
Gabarito - P2 - Questão 3
Prova Tipo B

(a) Temos que $(1+2x)^{1/\arctan x} = e^{\frac{\ln(1+2x)}{\arctan x}}$. Além disso, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{1}{1+x^2}} = 2\,.$$

Logo, $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\arctan x}} = e^2$.

(b) Como $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \leq \frac{1}{2}\,,$$

para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Pelo teorema do valor médio, concluímos que dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b-a) \leq \frac{1}{2}(b-a)\,,$$

como queríamos.