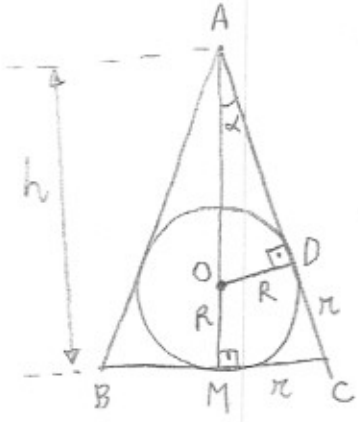
Questão 2) (2.0) Determine, caso exista, o cone circular reto de menor volume que pode ser ***circunscrito*** a uma esfera de raio R.



Triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle ADR$ são semelhantes

$$V = V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Logo $\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{(h-R)^2 - R^2}}{R}$

$$\Rightarrow r = \frac{Rh}{\sqrt{h^2 - 2hR}} \Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{R^2 h}{h-2R}}$$

$$V = \boxed{V(h) = \frac{\pi}{3} R^2 \frac{h^2}{h-2R}}$$

$h \in]2R, +\infty[$

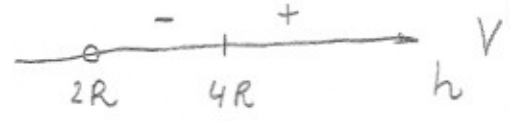
V é uma função derivável

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{2h(h-2R) - h^2}{(h-2R)^2}\right) = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{h^2 - 4hR}{(h-2R)^2}\right)$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h(h-4R) = 0 \Leftrightarrow h = 0 \notin]2R, +\infty[\quad \text{ou} \quad h = 4R$$

JUSTIFICATIVA

$$\lim_{h \to 2R^+} V(h) = \lim_{h \to +\infty} V(h) = +\infty$$



$h = 4R$ é ponto de mínimo de V em $]2R, +\infty[$

Portanto: Cone de menor volume satisfaz $h = 4R$ e $r = \sqrt{2}R$

Questão 3) (1.5) (a) Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x - \ln x$. Seja g a inversa de f; admitindo que g seja derivável até segunda ordem, calcule $g'(-1)$ e $g''(-1)$.

(b) (1.5) Mostre que $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ para todo $x > 0$.

a) $y = f(x)$ e $g(y) = x$

$f(x) = -x - \ln x \Rightarrow y = -g(y) - \ln(g(y))$

$y = -1 \Rightarrow -1 = -g(-1) - \ln(g(-1)) \Rightarrow \boxed{g(-1) = 1}$

$1 = -g'(y) + \left(\frac{-g'(y)}{g(y)}\right) \Rightarrow g'(y) = \frac{-g(y)}{1+g(y)} \Rightarrow \boxed{g'(-1) = \frac{-1}{2}}$

$g''(y) = \frac{-g'(y)(1+g(y)) - (-g(y))\,g'(y)}{(1+g(y))^2} = \frac{-g'(y)}{(1+g(y))^2}$

$\Rightarrow \boxed{g''(-1) = \frac{1/2}{4} = \frac{1}{8}}$

b) Seja $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $\forall x > 0$

Vamos mostrar que $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$.

$f'(x) = -\operatorname{sen} x + x$, $\forall x > 0$

i) Se $x \geq \pi/2$, então $\operatorname{sen} x \leq 1 \Rightarrow -\operatorname{sen} x \geq -1 \Rightarrow -\operatorname{sen} x + x \geq -1 + \pi/2 > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \geq \pi/2$

ii) Se $0 < x < \pi/2$

$f''(x) = -\cos x + 1$

$0 < x < \pi/2 \Rightarrow \cos x < 1 \Rightarrow -\cos x > -1 \Rightarrow -\cos x + 1 > 0$

$\Rightarrow f'$ é estritamente crescente em $[0, \pi/2]$

Como $f'(0) = 0$ e f' é contínua em $[0, \pi/2]$, segue que $f'(x) > 0$, $\forall x \in]0, \pi/2[$

Portanto, $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$ e isto implica que f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$

Como $f(0) = 0$ e f é contínua em $[0, +\infty[$, segue que $f(x) > 0$, $\forall x > 0$, ou seja $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $\forall x > 0$.

Questão 3) (a) (1.5) Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \ln x$. Seja g a inversa de f; admitindo que g seja derivável até segunda ordem, calcule $g'(1)$ e $g''(1)$.

(b) (1.5) Mostre que $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ para todo $x > 0$.

a) $y = f(x)$ e $g(y) = x$

$f(x) = x + \ln x \Rightarrow y = g(y) + \ln(g(y))$

$y = 1 \Rightarrow 1 = g(1) + \ln(g(1)) \Rightarrow \boxed{g(1) = 1}$

$\dfrac{d}{dy}(y) = \dfrac{d}{dy}(g(y) + \ln(g(y)))$

$1 = g'(y) + \dfrac{g'(y)}{g(y)} \Rightarrow g'(y) = \dfrac{g(y)}{1+g(y)} \Rightarrow \boxed{g'(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}}$

$g''(y) = \dfrac{g'(y)(1+g(y)) - g'(y)g(y)}{(1+g(y))^2} = \dfrac{g'(y)}{(1+g(y))^2}$

$\boxed{g''(1) = \dfrac{g'(1)}{(1+g(1))^2} = \dfrac{1/2}{4} = \dfrac{1}{8}}$

b) Seja $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x > 0$

Vamos mostrar que $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$.

$f'(x) = -\operatorname{sen} x + x$, $\forall x > 0$

i) Se $x \geq \pi/2$, então $\operatorname{sen} x \leq 1 \Rightarrow -\operatorname{sen} x \geq -1 \Rightarrow -\operatorname{sen} x + x \geq -1 + \pi/2 > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \geq \pi/2$

ii) Se $0 < x < \pi/2$

$f''(x) = -\cos x + 1$

$0 < x < \pi/2 \Rightarrow \cos x < 1 \Rightarrow -\cos x > -1 \Rightarrow -\cos x + 1 > 0$

$\Rightarrow f'$ é estritamente crescente em $[0, \pi/2]$

Como $f'(0) = 0$ e f' é contínua em $[0, \pi/2)$, segue que $f'(x) > 0$, $\forall x \in]0, \pi/2[$

Portanto, $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$ e isto implica que f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$

Como $f(0) = 0$ e f é contínua em $[0, +\infty[$, segue que $f(x) > 0$, $\forall x > 0$,

ou seja $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x > 0$.

Questão 4)(a) (1.0) Sejam $x_0 \in]a,b[$ e $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ e derivável em todo $x \neq x_0$. Mostre que, se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, então f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = l$.

(b) (1.0) Calcule $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

(a) Seja $Q^f_{x_0} :]a,b[\setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Queremos mostrar que $\exists \lim_{x \to x_0} Q^f_{x_0}(x) = l$.

Solução 1:

Tome $\begin{cases} F :]a,b[\setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(x) - f(x_0) \\ G :]a,b[\setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto x - x_0 \end{cases}$

Tem-se:

(i) $\lim_{x \to x_0} F(x) = 0$ (pela continuidade de f em x_0)

e $\lim_{x \to x_0} G(x) = 0$;

(ii) F e G são deriváveis;

$\forall x \in]a,b[\setminus \{x_0\} : F'(x) = f'(x), \; G'(x) = 1$

$\therefore \exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to x_0} f'(x) = l$ (por hipótese)

De (i) e (ii) segue-se a tese, pela 1ª regra de l'Hospital. #

Questão 4) (a) (1.0) Sejam $x_0 \in]a,b[$ e $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ e derivável em todo $x \neq x_0$. Mostre que, se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, então f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = l$.

(b) (1.0) Calcule $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{3}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

(b) Tem-se, $\forall x \in]0, \pi/2[$:

$$\left(\frac{3}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = \exp\left[\operatorname{tg} x \cdot \ln\left(\frac{3}{x}\right)\right] = \exp\left[\frac{-\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{\operatorname{cotg} x}\right]$$

Tome $f, g :]0, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por, respectivamente, $f(x) = -\ln\left(\frac{x}{3}\right)$ e $g = \operatorname{cotg}$.

Tem-se:

(i) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

(ii) f e g são deriváveis;

$\forall x \in]0, \pi/2[$: $f'(x) = -\frac{1}{x}$, $g'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

$$\therefore \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Como $\begin{cases} \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \end{cases}$ segue-se $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$;

assim, pela 2ª regra de l'Hôpital, conclui-se que $\exists \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Como exp é contínua, segue-se $\exists \lim_{x \to 0^+} \exp\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \exp(0) = \boxed{1}$ #

Solução 2:

$\forall x \in]x_0, b[$: f é contínua em $[x_0, x]$ e derivável em $]x_0, x[$; portanto, pelo TVM, $\exists\, c(x) \in]x_0, x[$ tal que $f(x) - f(x_0) = f'(c(x)) \cdot (x - x_0)$, donde $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c(x))$. O mesmo argumento se aplica para mostrar que, $\forall x \in]a, x_0[$, $\exists\, c(x) \in]x, x_0[$ tal que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c(x))$.

A função $c :]a, b[\setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida é tal que $\lim_{x \to x_0} c(x) = x_0$ (pelo teorema do confronto). Como $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell$ (por hipótese) e $\begin{cases} \lim_{x \to x_0} c(x) = x_0 \\ \forall x \in]a, b[\setminus \{x_0\},\ c(x) \neq x_0 \end{cases}$,

segue-se (limite de função composta) que $\exists \lim_{x \to x_0} f'(c(x)) = \ell$, i.e. $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$. #

A

Questão 1) (3.0) Seja $f(x) = \frac{x}{2} + \ln(x^2+3)$.

(a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

(b) Determine os intervalos em que f tem concavidade para cima e os intervalos em que f tem concavidade para baixo.

(c) Determine, caso existam, as assíntotas verticais, horizontais e as da forma $y = ax + b$, com $a \neq 0$, de f.

(d) Utilizando as informações acima, esboce o gráfico de f.

(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+3}{2(x^2+3)}$$

		-3		-1	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

f é decrescente em $]-3,-1[$

f é crescente nos intervalos $]-\infty,-3[$ e $]-1,+\infty[$

(b) $f''(x) = \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$

		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
f''	−	0	+	0	−
f	∩		∪		∩

concav. para baixo nos intervalos $]-\infty,-\sqrt{3}[$ e $]\sqrt{3},+\infty[$.
concav. para cima no intervalo $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$.

(c) LIMITES AUXILIARES:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{x} \quad (x \to +\infty) \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

Analogamente, $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{x} = 0$ (*) ($x \to -\infty$, L'Hôpital)

Limites em $\pm\infty$:

A $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} + \ln(x^2+3) = +\infty$ ($\frac{x}{2} \to +\infty$, $\ln(x^2+3) \to +\infty$)

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} + \ln(x^2+3) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{2} + \frac{\ln(x^2+3)}{x}\right) = -\infty$ ($x \to -\infty$, $\frac{1}{2} \to 1/2$, $\frac{\ln(x^2+3)}{x} \to 0$ (feito em *))

Logo, não há assintotas horizontais

Também não há assíntotas verticais já que $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Verificando a existência de assíntotas da forma

$y = ax + b$ com $a \neq 0$:

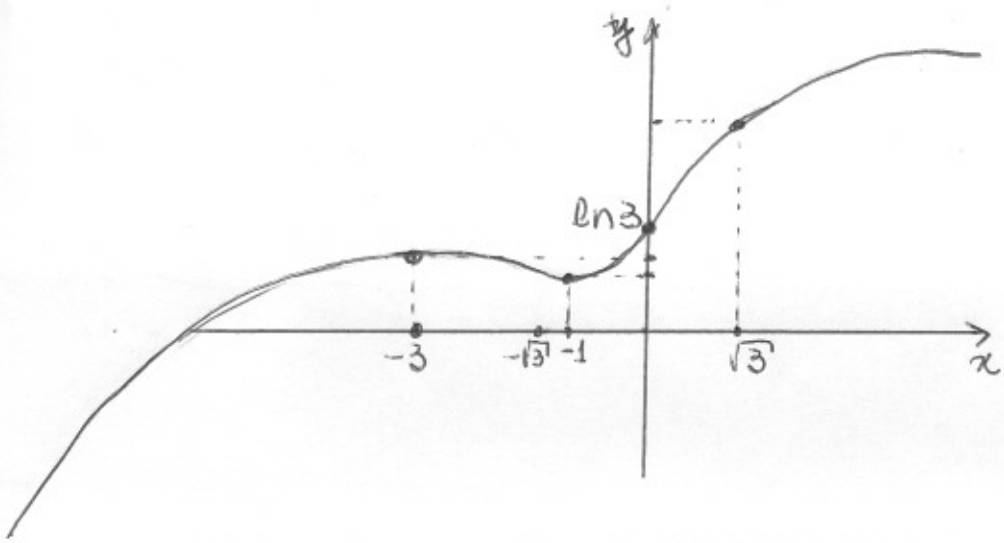
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{\ln(x^2+3)}{x} = \frac{1}{2}$ ($\frac{\ln(x^2+3)}{x} \to 0$)

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} + \frac{\ln(x^2+3)}{x} = \frac{1}{2}$ ($\frac{\ln(x^2+3)}{x} \to 0$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+3) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2+3) = +\infty$

} Logo, não há assíntotas.



$f(-3) = -\frac{3}{2} + \ln(12) \sim 1$

$f(-1) = -\frac{1}{2} + \ln 4 \sim 0.8$

$f(+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln 6 \sim 2.7$

B

Questão 1) (3.0) Seja $f(x) = \frac{x}{3} + \ln(x^2+5)$.

(a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

(b) Determine os intervalos em que f tem concavidade para cima e os intervalos em que f tem concavidade para baixo.

(c) Determine, caso existam, as assíntotas verticais, horizontais e as da forma $y = ax + b$, com $a \neq 0$, de f.

(d) Utilizando as informações acima, esboce o gráfico de f.

(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x^2+6x+5}{x^2+5}$$

	-5		-1	
f'	$+$	0	$-$	0 $+$
f	↗		↘	↗

f crescente em $]-\infty, -5[$ e em $]-1, +\infty[$

f decrescente em $]-5, -1[$.

(b)

$$f''(x) = \frac{-2x^2+10}{(x^2+5)^2}$$

	$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
f''	$-$	0 $+$		0 $-$
f	∩		∪	∩

concavidade para cima em $]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$

concavidade para baixo nos intervalos $]-\infty, -\sqrt{5}[$ e $]\sqrt{5}, +\infty[$.

(c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+5)}{x} \overset{(x\to+\infty)}{\overset{(x\to+\infty)}{=}} \overset{\text{L'Hôpital}}{\lim_{x\to+\infty}} \frac{2x}{x^2+5} \overset{(+\infty)}{\overset{(+\infty)}{=}} \overset{\text{L'Hop}}{\lim_{x\to+\infty}} \frac{2}{2x} = 0$$

Analogamente, $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+5)}{x} \overset{(x\to-\infty)}{\overset{(x\to-\infty)}{=}} 0$ (*)

(*) limites auxiliares

Limites em $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{3}}_{\to+\infty} + \ln(\underbrace{x^2+5}_{\to+\infty}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{3}}_{\to-\infty} + \ln(\underbrace{x^2+5}_{\to+\infty}) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{\to 1/3} + \underbrace{\frac{\ln(x^2+5)}{x}}_{\to 0}\right) = -\infty$$

(limites em (*))

Logo, não há assíntotas horizontais.

Também não há assíntotas verticais já que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Verificando existência de assíntotas $y = ax+b$ com $a \neq 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{\ln(x^2+5)}{x}}_{\to 0} = \frac{1}{3} \quad \text{(usando (*))}$$

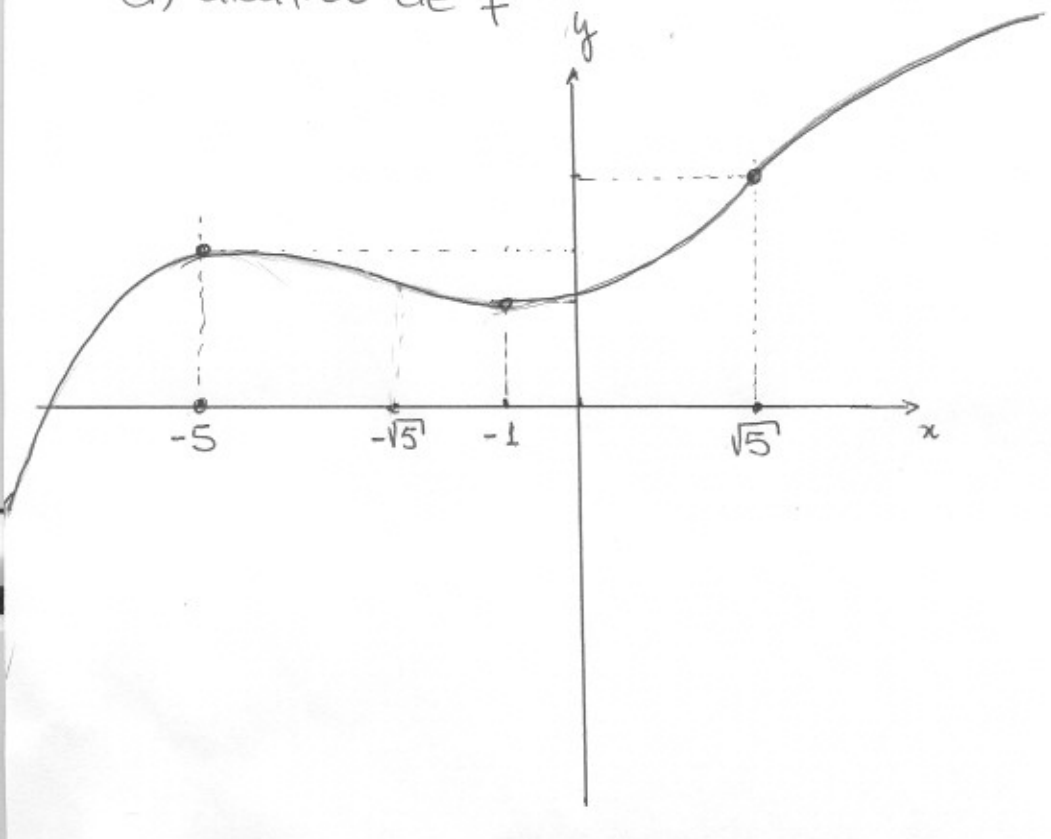
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{\ln(x^2+5)}{5}}_{\to 0} = \frac{1}{3} \quad \text{(analogo)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{3} = \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+5) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \frac{x}{3} = \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2+5) = +\infty$$

} Logo, não há assíntotas

d) Gráfico de f



$f(-5) = -\frac{5}{3} + \ln 30 \sim 2$

$f(-1) = -\frac{1}{3} + \ln 6 \sim 1{,}5$

$f(\sqrt{5}) = -\frac{\sqrt{5}}{3} + \ln 10 \sim 3$

B