MAT 2453 - Cálculo I - POLI - 2006
Gabarito da P2 - A

Questão A1) Calcule

(1.0) (a) $\lim_{x\to 0} \left(\cos(2x)\right)^{3/x^2}$ (1.0) (b) $\int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\pi\, x}{2}\right) + \mathrm{e}^{-2x}\right) \mathrm{d}x$

Resp.:

(a) Tem-se, $\forall x \in (-\pi/4, \pi/4) \setminus \{0\}$: $(\cos 2x)^{3/x^2} = \exp(\frac{3}{x^2} \cdot \ln(\cos 2x))$. Pondo $f(x) \doteq \ln(\cos 2x)$ e $g(x) \doteq x^2$, f e g são funções deriváveis em $(-\pi/4, \pi/4)$, cujas derivadas são dadas, respectivamente, por $f'(x) = -\frac{2\,\mathrm{sen}\,2x}{\cos 2x}$ e $g'(x) = 2x$. Assim, $(\forall x \in (-\pi/4, \pi/4) \setminus \{0\})$ $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2}{\cos 2x}\,\frac{\mathrm{sen}\,2x}{2x}$, donde $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -2$ (usamos aqui o limite trigonométrico fundamental, limite de função composta, continuidade da função cosseno, regras do produto e do quociente para limites). Como $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$ (f e g são deriváveis, logo contínuas), podemos aplicar a primeira regra de l'Hôpital para concluir que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -2$, donde $\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2} \cdot \ln(\cos 2x) = \lim_{x\to 0} 3\frac{f(x)}{g(x)} = -6$. Finalmente, como exp é contínua, segue-se $\lim_{x\to 0} \exp(3/x^2 \cdot \ln(\cos 2x)) = \mathrm{e}^{-6}$.

(b) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \mathrm{e}^{-2x}$. A função $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \frac{\mathrm{sen}\,\pi x/2}{\pi/2} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}$ é primitiva de f; assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_0^1 f = F(1) - F(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}^2} + \frac{1}{2}$.

Questão A2) Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1 + 3\ln(x+2)$.

(0.5) (a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.
(1.0) (b) Determine os intervalos em que f tem concavidade para cima e os intervalos em que f tem concavidade para baixo.
(1.0) (c) Determine, caso existam, as assíntotas verticais, horizontais e as da forma $y = ax + b$, com $a \neq 0$, de f.
(1.0) (d) Utilizando as informações acima, esboce o gráfico de f.

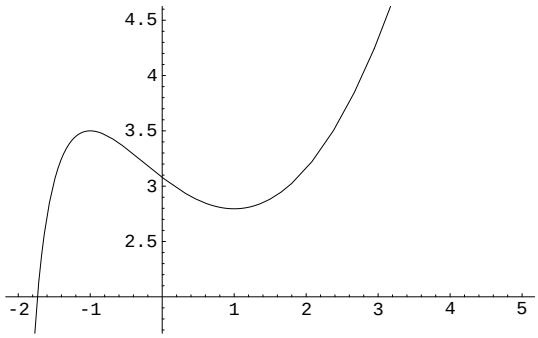
Resp.:

(a) Tem-se: dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$; a função em apreço é derivável e sua função derivada é dada por $(\forall x > -2) f'(x) = x - 2 + \frac{3}{x+2} = \frac{x^2-1}{x+2}$. Assim, f' tem sinal positivo nos intervalos $(-2,-1)$ e $(1,+\infty)$ e sinal negativo no intervalo $(-1,1)$. Por corolário do teorema do valor médio, segue-se que f é estritamente crescente nos intervalos $(-2,-1]$ e $[1,+\infty)$, e estritamente decrescente no intervalo $[-1,1]$.

(b) f é derivável até segunda ordem, e $f'' : (-2,+\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $f''(x) = 1 - \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x+2)^2}$, onde $x_0 = -2-\sqrt{3}$ e $x_1 = -2+\sqrt{3}$ (portanto $x_0 < -2$ e $-1 < x_1 < 0$). Assim, f'' tem sinal positivo no intervalo $(x_1,+\infty)$ (i.e. f tem concavidade para cima no referido intervalo) e sinal negativo no intervalo $(-2,x_1)$ (i.e. f tem concavidade para baixo no referido intervalo).

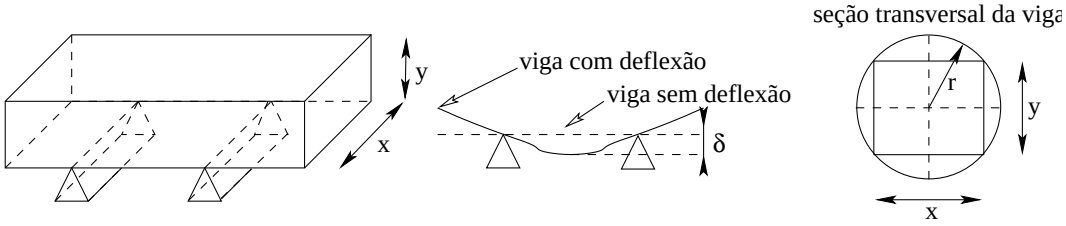
(c) Tem-se: $\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$, logo a reta $x = -2$ é uma assíntota vertical. Uma aplicação da segunda regra de l'Hôpital fornece $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$, logo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x/2 - 2 + 1/x + 3\frac{\ln(x+2)}{x}\right) = +\infty$, portanto f não tem assíntota à direita. Note que, em particular, segue-se do cálculo do último limite que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \frac{f(x)}{x}\right) = +\infty$.

(d) O gráfico de f é conforme esboçado na figura abaixo:



Questão A3) (Valor: 2.0) *Para esta questão você utilizá o seguinte fato:*

Considere uma viga de seção transversal retangular e densidade uniforme. Sabe-se que, quando apoiada em dois pontos, sua deflexão δ (vide figura abaixo) é inversamente proporcional ao momento de inércia de sua seção transversal, dado por $I = \frac{xy^3}{12}$, sendo x e y os lados do retângulo.



Utilizando a informação acima resolva o seguinte problema.

Suponha que uma viga seja fabricada a partir de um cilindro de raio $r = 4$, isto é, a seção transversal será um retângulo inscrito no círculo, conforme a figura. Calcule as dimensões x e y para que a deflexão seja mínima.

Resp.:

Uma condição necessária e suficiente para que um retângulo de lados $x > 0$ e $y > 0$ possa ser inscrito num círculo de diâmetro $d = 2r$ é, pelo teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = d^2$, i.e. $y = (d^2 - x^2)^{1/2}$. Assim, para um tal retângulo, o momento de inércia I do enunciado será dado por $I = \frac{xy^3}{12} = \frac{x(d^2-x^2)^{3/2}}{12}$. O problema se reduz, pois, a encontrar (caso exista) o(s) ponto(s) de máximo da função $f : (0, d) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(d^2 - x^2)^{3/2}$. Aplicando-se a regra de Leibnitz e a regra da cadeia, conlui-se que tal função é derivável, e sua derivada é dada por $(\forall x \in (0, d))$ $f'(x) = (d^2 - x^2)^{3/2} + x\frac{3}{2}(d^2 - x^2)^{1/2}(-2x) = (d^2 - x^2)^{1/2}(d^2 - 4x^2)$. Assim, f' é positiva no intervalo $(0, d/2)$ e negativa no intervalo $(d/2, d)$, donde (por corolário do teorema do valor médio) f é estritamente crescente no primeiro intervalo e estritamente

decrescente no segundo. Ou seja, $d/2 = r$ é o único ponto de máximo de f. As dimensões da seção transversal da viga que minimizam a deflexão são, pois, $x = r = 4$ e $y = ((2r)^2 - x^2)^{1/2} = r\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Questão A4) (1.5) (a) Prove a desigualdade:

$$\frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(a)} < \frac{b}{a}\ , \text{ sempre que } 0 < a < b < \frac{\pi}{2}\,.$$

(1.0) (b) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0,1]$, derivável em $]0,1[$ e tal que $0 < f(x) < 1$, para todo $x \in [0,1]$, e $f'(x) < 2x$, para todo $x \in]\,0,1[$. Prove que a equação $f(x) = x^2$ tem uma e somente uma solução real.

Resp.:

(a) Seja $f : (0,\pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Mostremos que f é estritamente decrescente (donde a desigualdade afirmada no enunciado). A função em questão é derivável e, aplicando-se a regra do quociente, sua derivada é dada por, $\forall x \in (0,\pi/2)$: $f'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$. O sinal de $f'(x)$ é, portanto, dado pelo sinal do numerador da última fração (uma vez que $x^2 > 0$ para $x \in (0,\pi/2)$). Tomando-se $g : [0,\pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x\cos x - \operatorname{sen} x$, g é derivável e $(\forall x \geq 0) g'(x) = \cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x = -x\operatorname{sen} x$, logo $g' < 0$ em $(0,\pi/2)$, donde g é estritamente decrescente em $[0,\pi/2)$ (por corolário do teorema do valor médio). Como $g(0) = 0$, segue-se $g < 0$ em $(0,\pi/2)$, donde $f' < 0$ em $(0,\pi/2)$, portanto f é estritamente decrescente (novamente por corolário do TVM), como queríamos demonstrar.

(b) É equivalente mostrar que a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x^2$ tem um único zero. Com efeito, g é contínua em $[0,1]$ (pois é diferença de duas funções contínuas), derivável em $]0,1[$ (pois é diferença de duas funções deriváveis), e sua derivada $g' :]0,1[\to \mathbb{R}$ é dada por $g'(x) = f'(x) - 2x$, portanto $g' < 0$ por hipótese. Assim, por corolário do teorema do valor médio, g é estritamente decrescente e, em particular, injetiva — o que nos garante a unicidade do zero, caso ele exista. Por outro lado, temos $g(0) = f(0) > 0$ (por hipótese) e $g(1) = f(1) - 1 < 0$ (também por hipótese), e decorre da continuidade de g e do teorema do valor intermediário que a referida função tem pelo menos um zero no intervalo $]0,1[$.

MAT 2453 - Cálculo I - POLI - 2006
Gabarito da P2 - B

Questão B1) Calcule

(1.0) (a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos(2x)\right)^{5/x^2}$ (1.0) (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\pi\, x}{2}\right) + \mathrm{e}^{-3x}\right) \mathrm{d}x$

Resp.:

(a) Tem-se, $\forall x \in (-\pi/4, \pi/4) \setminus \{0\}$: $(\cos 2x)^{5/x^2} = \exp(\frac{5}{x^2} \cdot \ln(\cos 2x))$. Pondo $f(x) \doteq \ln(\cos 2x)$ e $g(x) \doteq x^2$, f e g são funções deriváveis em $(-\pi/4, \pi/4)$, cujas derivadas são dadas, respectivamente, por $f'(x) = -\frac{2\,\mathrm{sen}\,2x}{\cos 2x}$ e $g'(x) = 2x$. Assim, $(\forall x \in (-\pi/4, \pi/4) \setminus \{0\})$ $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2}{\cos 2x}\,\frac{\mathrm{sen}\,2x}{2x}$, donde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -2$ (usamos aqui o limite trigonométrico fundamental, limite de função composta, continuidade da função cosseno, regras do produto e do quociente para limites). Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$ (f e g são deriváveis, logo contínuas), podemos aplicar a primeira regra de l'Hôpital para concluir que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -2$, donde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{x^2} \cdot \ln(\cos 2x) = \lim\limits_{x\to 0} 5\frac{f(x)}{g(x)} = -10$. Finalmente, como exp é contínua, segue-se $\lim\limits_{x\to 0} \exp(5/x^2 \cdot \ln(\cos 2x)) = \mathrm{e}^{-10}$.

(b) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \mathrm{e}^{-3x}$. A função $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \frac{\mathrm{sen}\,\pi x/2}{\pi/2} + \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}$ é primitiva de f; assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_0^1 f = F(1) - F(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3\,\mathrm{e}^3} + \frac{1}{3}$.

Questão B2) Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - 5 + 3\ln(x+3)$.

(0.5) (a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.
(1.0) (b) Determine os intervalos em que f tem concavidade para cima e os intervalos em que f tem concavidade para baixo.
(1.0) (c) Determine, caso existam, as assíntotas verticais, horizontais e as da forma $y = ax + b$, com $a \neq 0$, de f.
(1.0) (d) Utilizando as informações acima, esboce o gráfico de f.

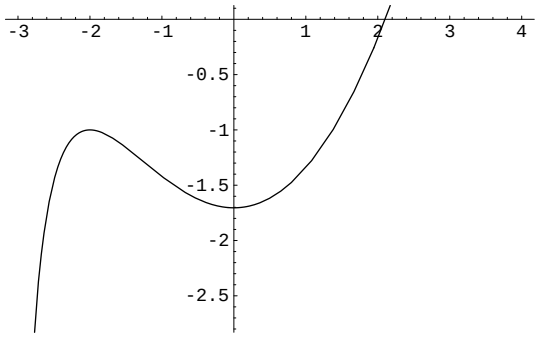
Resp.:

(a) Tem-se: $\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$; a função em apreço é derivável e sua função derivada é dada por $(\forall x > -3) f'(x) = x - 1 + \frac{3}{x+3} = \frac{x^2+2x}{x+3} = \frac{x(x+2)}{x+3}$. Assim, f' tem sinal positivo nos intervalos $(-3,-2)$ e $(0,+\infty)$ e sinal negativo no intervalo $(-2,0)$. Por corolário do teorema do valor médio, segue-se que f é estritamente crescente nos intervalos $(-3,-2]$ e $[0,+\infty)$, e estritamente decrescente no intervalo $[-2,0]$.

(b) f é derivável até segunda ordem, e $f'' : (-3,+\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $f''(x) = 1 - \frac{3}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+6}{(x+3)^2} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x+3)^2}$, onde $x_0 = -3-\sqrt{3}$ e $x_1 = -3+\sqrt{3}$ (portanto $x_0 < -3$ e $-2 < x_1 < 0$). Assim, f'' tem sinal positivo no intervalo $(x_1,+\infty)$ (i.e. f tem concavidade para cima no referido intervalo) e sinal negativo no intervalo $(-3,x_1)$ (i.e. f tem concavidade para baixo no referido intervalo).

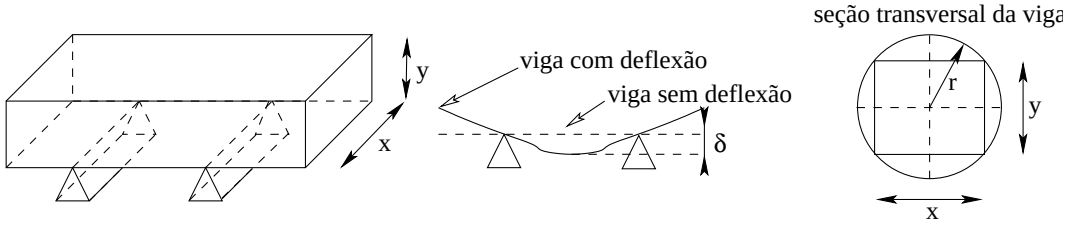
(c) Tem-se: $\lim_{x\to-3} f(x) = -\infty$, logo a reta $x = -3$ é uma assíntota vertical. Uma aplicação da segunda regra de l'Hôpital fornece $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+3} = 0$, logo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x/2 - 1 - 5/x + 3\frac{\ln(x+3)}{x}\right) = +\infty$, portanto f não tem assíntota à direita. Note que, em particular, segue-se do cálculo do último limite que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \frac{f(x)}{x}\right) = +\infty$.

(d) O gráfico de f é conforme esboçado na figura abaixo:



Questão B3) (Valor: 2.0) *Para esta questão você utilizá o seguinte fato:*

Considere uma viga de seção transversal retangular e densidade uniforme. Sabe-se que, quando apoiada em dois pontos, sua deflexão δ (vide figura abaixo) é inversamente proporcional ao momento de inércia de sua seção transversal, dado por $I = \frac{xy^3}{12}$, sendo x e y os lados do retângulo.



Utilizando a informação acima resolva o seguinte problema.

Suponha que uma viga seja fabricada a partir de um cilindro de raio $r = 6$, isto é, a seção transversal será um retângulo inscrito no círculo, conforme a figura. Calcule as dimensões x e y para que a deflexão seja mínima.

Resp.:

Uma condição necessária e suficiente para que um retângulo de lados $x > 0$ e $y > 0$ possa ser inscrito num círculo de diâmetro $d = 2r$ é, pelo teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = d^2$, i.e. $y = (d^2 - x^2)^{1/2}$. Assim, para um tal retângulo, o momento de inércia I do enunciado será dado por $I = \frac{xy^3}{12} = \frac{x(d^2-x^2)^{3/2}}{12}$. O problema se reduz, pois, a encontrar (caso exista) o(s) ponto(s) de máximo da função $f : (0, d) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(d^2 - x^2)^{3/2}$. Aplicando-se a regra de Leibnitz e a regra da cadeia, conlui-se que tal função é derivável, e sua derivada é dada por $(\forall x \in (0, d))\ f'(x) = (d^2 - x^2)^{3/2} + x\frac{3}{2}(d^2 - x^2)^{1/2}(-2x) = (d^2 - x^2)^{1/2}(d^2 - 4x^2)$. Assim, f' é positiva no intervalo $(0, d/2)$ e negativa no intervalo $(d/2, d)$, donde (por corolário do teorema do valor médio) f é estritamente crescente no primeiro intervalo e estritamente

decrescente no segundo. Ou seja, $d/2 = r$ é o único ponto de máximo de f. As dimensões da seção transversal da viga que minimizam a deflexão são, pois, $x = r = 6$ e $y = ((2r)^2 - x^2)^{1/2} = r\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Questão B4) (1.5) (a) Prove a desigualdade:

$$\frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(a)} < \frac{b}{a}\,, \text{ sempre que } 0 < a < b < \frac{\pi}{2}\,.$$

(1.0) (b) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0,1]$, derivável em $]0,1[$ e tal que $0 < f(x) < 1$, para todo $x \in [0,1]$, e $f'(x) < 2x$, para todo $x \in]\,0,1[$. Prove que a equação $f(x) = x^2$ tem uma e somente uma solução real.

Resp.:

(a) Seja $f : (0,\pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Mostremos que f é estritamente decrescente (donde a desigualdade afirmada no enunciado). A função em questão é derivável e, aplicando-se a regra do quociente, sua derivada é dada por, $\forall x \in (0,\pi/2)$: $f'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$. O sinal de $f'(x)$ é, portanto, dado pelo sinal do numerador da última fração (uma vez que $x^2 > 0$ para $x \in (0,\pi/2)$). Tomando-se $g : [0,\pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x\cos x - \operatorname{sen} x$, g é derivável e $(\forall x \geq 0) g'(x) = \cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x = -x\operatorname{sen} x$, logo $g' < 0$ em $(0,\pi/2)$, donde g é estritamente decrescente em $[0,\pi/2)$ (por corolário do teorema do valor médio). Como $g(0) = 0$, segue-se $g < 0$ em $(0,\pi/2)$, donde $f' < 0$ em $(0,\pi/2)$, portanto f é estritamente decrescente (novamente por corolário do TVM), como queríamos demonstrar.

(b) É equivalente mostrar que a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x^2$ tem um único zero. Com efeito, g é contínua em $[0,1]$ (pois é diferença de duas funções contínuas), derivável em $]0,1[$ (pois é diferença de duas funções deriváveis), e sua derivada $g' :]0,1[\to \mathbb{R}$ é dada por $g'(x) = f'(x) - 2x$, portanto $g' < 0$ por hipótese. Assim, por corolário do teorema do valor médio, g é estritamente decrescente e, em particular, injetiva — o que nos garante a unicidade do zero, caso ele exista. Por outro lado, temos $g(0) = f(0) > 0$ (por hipótese) e $g(1) = f(1) - 1 < 0$ (também por hipótese), e decorre da continuidade de g e do teorema do valor intermediário que a referida função tem pelo menos um zero no intervalo $]0,1[$.

2^a Prova - MAT-2453 - Cálculo I
POLI-17/05/2005
B ímpar e A par

Questão 1: (2,5 pontos). Seja

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 - x}.$$

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, os de concavidade, os pontos de máximo e mínimo locais, as assíntotas e os limites necessários. Esboce o gráfico.

Sinais:

		-1		0		1	
$x^2 + x$	$+$		$-$		$+$		$+$
$1 - x$	$+$		$+$		$+$		$-$
	$+$		$-$		$+$		$-$

Assíntotas:

$Em\ 1$		$\lim_{x\to 1_+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \infty$
No	$\pm\infty$	$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = -2$

As assíntotas são $x = 1$ e $y = -x - 2$.

Primeira Derivada:

$$f'(x) = \left(\tfrac{x^2+x}{1-x}\right)' = \tfrac{(2x+1)(1-x)-(x^2+x)(-1)}{(1-x)^2} = \tfrac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}$$

O denominador *não está* definido para $x = 1$ e onde está definido, é sempre positivo. O numerador tem raízes $1 \pm \sqrt{2}$.

	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
	$-$		$+$		$-$
	$\uparrow$		$\uparrow$		
	$1 - \sqrt{2}$		$1 + \sqrt{2}$		

Observe que $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0 < 1 < 1 + \sqrt{2}$. A função decresce em $]-\infty, 1 - \sqrt{2}[$ e $]1 + \sqrt{2}, \infty[$. Em $]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$, cresce.

Segunda Derivada:

$$f''(x) = \left(\tfrac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}\right)' = \tfrac{(-2x+2)(1-x)^2-(-x^2+2x+1)((2)(1-x)(-1))}{(1-x)^4} = \tfrac{(-2x+2)(1-x)-(-x^2+2x+1)(-2)}{(1-x)^3} = \tfrac{4}{(1-x)^3}$$

O sinal de f'' é o sinal de $1 - x$

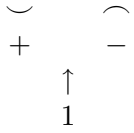


Gráfico:

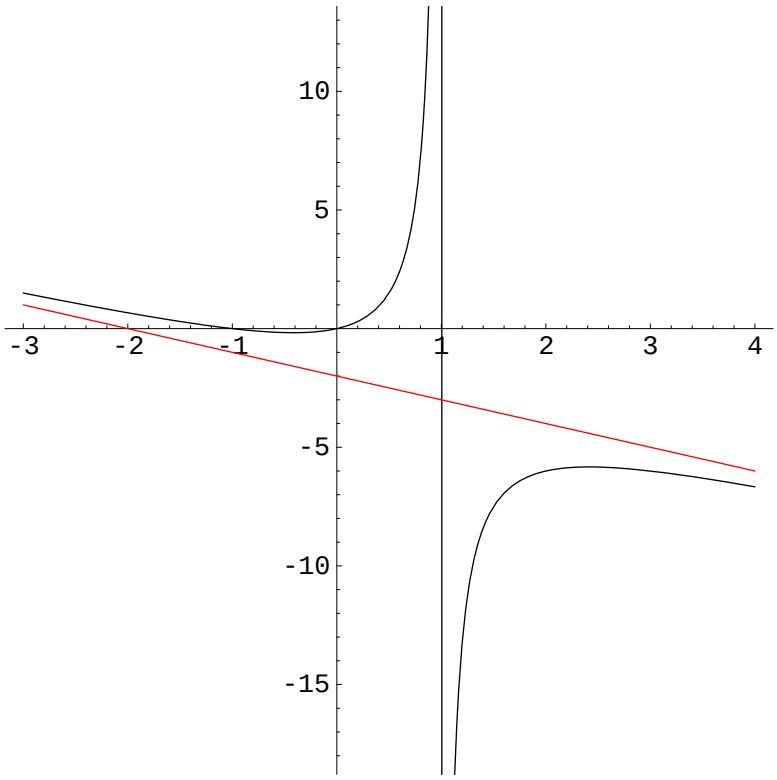


Figura 1: Gráfico de $f(x) = \frac{x^2+x}{1-x}$

Questão 2: (2,5 pontos)

(i) Encontre o polinômio de Taylor de ordem 2 em volta de $x_0 = 1$ da função

$$f(x) = x \ln x + x^2.$$

(ii) Prove que

$$|x \ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}| < \frac{(x-1)^3}{6}$$

para todo $x > 1$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = x\ln x + x^2 & f(1) = 1 \\ f'(x) = \ln x + 1 + 2x & f'(1) = 3 \\ f''(x) = \frac{1}{x} + 2 & f''(1) = 3 \\ f'''(x) = \frac{-1}{x^2} & \end{array}$$

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$P_2(x) = 1 + 3(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Sabemos que o erro de f é dado por $E(x) = \frac{f'''(\overline{x})}{3!}(x-1)^3$, para certo $\overline{x}$ entre 1 e x. Então temos, $E(x) = \frac{-1}{6\overline{x}^2}(x-1)^3$.

Se $x > 1$, temos $1 < \overline{x} < x$ e

$$\begin{array}{l} f(x) - P_2(x) = E(x) \\ (x\ln x + x^2) - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{6\overline{x}^2}(x-1)^3 \end{array}$$

Como $1 < \overline{x}$, $\frac{1}{\overline{x}^2} < 1$. Donde,

$$|x\ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}| < \tfrac{(x-1)^3}{6}$$

Questão 3: (2,5 pontos)

(i) Prove que

$$|\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a}| < \frac{e^b b}{4}(b-a)$$

para todo $b > a > 2$.

(ii) Calcule o limite

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)^{\frac{1}{\ln x}}$$

i) Considere a função $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Essa função é derivável e, pelo TVM, existe $a < c < b$ onde $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Substituindo

$$\frac{\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a}}{b-a} = \frac{e^c(c-1)}{c^2}$$

Como $2 < a < c$, $\frac{1}{c^2} < \frac{1}{4}$. Como $c < b$, $e^c < e^b$ e $c - 1 < b - 1 < b$. Daí:

$$\frac{\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a}}{b-a} = \frac{e^c(c-1)}{c^2} < \frac{e^b(b-1)}{4}(b-a) < \frac{e^b b}{4}(b-a)$$

ii) Considere a função $f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{\ln x}}$. Passando ao log,

$$\ln f(x) = \ln(x^2-1)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{\ln x}\ln(x^2-1)$$

Como log é uma função crescente e, usando L'Hospital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2-1)'}{\ln x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

então $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^2$.

Questão 4: (2,5 pontos) Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2.

(i) Encontre o raio da esfera e o lado do cubo que minimizam a soma de seus volumes.

(ii) Encontre o raio da esfera e o lado do cubo que maximizam a soma de seus volumes.

Sejam $r \geqslant 0$ o raio da esfera e $l \geqslant 0$ o lado do cubo. A soma das áreas de suas superfícies é dada por:

$$A = 6l^2 + 4\pi r^2 = 2$$

Soma dos volumes:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + l^3$$

Fazendo $6l^2 = 2 - 4\pi r^2$, temos $l = \sqrt{\frac{2-4\pi r^2}{6}}$. Assim, o problema se reduz a encontrar (caso existam) os pontos de máximo e mínimo da função $V : [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \Big(\frac{1-2\pi r^2}{3}\Big)^{3/2}$$

Como V é contínua e está definida no intervalo fechado e limitado $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, pelo teorema de Weierstrass conclui-se que existem pontos de máximo e de mínimo de V no referido intervalo. Além disso, como V é derivável, segue do teorema de Fermat que, se um destes pontos não for extremidade do intervalo, deverá ser um ponto crítico de V no interior do mesmo. Conclusão: V tem pontos de máximo e mínimo no intervalo $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, e tais pontos pertencem ao conjunto formado pelas extremidades do intervalo e pelos pontos críticos de V no interior do mesmo.

A função derivada de V, $V' : [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}] \to \mathbb{R}$, é dada por:

$$V'(r) = 4\pi r^2 - 2\pi r\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}} =$$
$$= 2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big)$$

Para encontrar os pontos críticos de V, observe que $2\pi r\left(2r-\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\right)=0$ se, e somente se, $r=0$ ou $2r=\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}$, i.e. se, e somente se $r=0$ ou $r=\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$. Assim, os pontos críticos de V são 0 e $r_0\doteq\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}\in(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$.

Além disso, como 0 e r_0 são os únicos zeros de V', e como V' é contínua, segue do teorema do valor intermediário que V' deve ter sinal constante nos intervalos $(0,r_0)$ e $(r_0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$. Mas $V'(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})=2>0$, e $\lim_{r\to 0}\left(2r-\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}<0$ (portanto $2\pi r\left(2r-\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\right)$ tem sinal negativo para $r>0$ e próximo de zero), o que nos permite concluir que V' tem sinal negativo em $(0,r_0)$ e positivo em $(r_0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$. Logo, pelo teste da derivada primeira, $r_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$ é o ponto de mínimo de V.

Por outro lado, temos: $V(0)=\sqrt{\frac{1}{27}}$ e $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})=\sqrt{\frac{1}{9\frac{\pi}{2}}}$. Como $\pi<4$, tem-se $\frac{\pi}{2}<2$, logo $9\frac{\pi}{2}<27$, donde $\frac{1}{9\frac{\pi}{2}}>\frac{1}{27}$, o que implica $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})>V(0)$. Assim, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é o ponto de máximo de V.