2^a Prova - MAT-2453 - Cálculo I
POLI-17/05/2005
B ímpar e A par

Questão 1: (2,5 pontos). Seja

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 - x}.$$

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, os de concavidade, os pontos de máximo e mínimo locais, as assíntotas e os limites necessários. Esboce o gráfico.

Sinais:

		-1		0		1	
$x^2 + x$	$+$		$-$		$+$		$+$
$1 - x$	$+$		$+$		$+$		$-$
	$+$		$-$		$+$		$-$

Assíntotas:

$Em\ 1$		$\lim_{x\to 1_+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \infty$
No	$\pm\infty$	$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = -2$

As assíntotas são $x = 1$ e $y = -x - 2$.

Primeira Derivada:

$$f'(x) = \left(\tfrac{x^2+x}{1-x}\right)' = \tfrac{(2x+1)(1-x)-(x^2+x)(-1)}{(1-x)^2} = \tfrac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}$$

O denominador *não está* definido para $x = 1$ e onde está definido, é sempre positivo. O numerador tem raízes $1 \pm \sqrt{2}$.

	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
	$-$		$+$		$-$
	$\uparrow$		$\uparrow$		
	$1 - \sqrt{2}$		$1 + \sqrt{2}$		

Observe que $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0 < 1 < 1 + \sqrt{2}$. A função decresce em $]-\infty, 1 - \sqrt{2}[$ e $]1 + \sqrt{2}, \infty[$. Em $]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$, cresce.

Segunda Derivada:

$$f''(x) = \left(\tfrac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}\right)' = \tfrac{(-2x+2)(1-x)^2-(-x^2+2x+1)((2)(1-x)(-1))}{(1-x)^4} = \tfrac{(-2x+2)(1-x)-(-x^2+2x+1)(-2)}{(1-x)^3} = \tfrac{4}{(1-x)^3}$$

O sinal de f'' é o sinal de $1 - x$

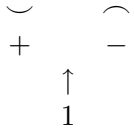

Gráfico:

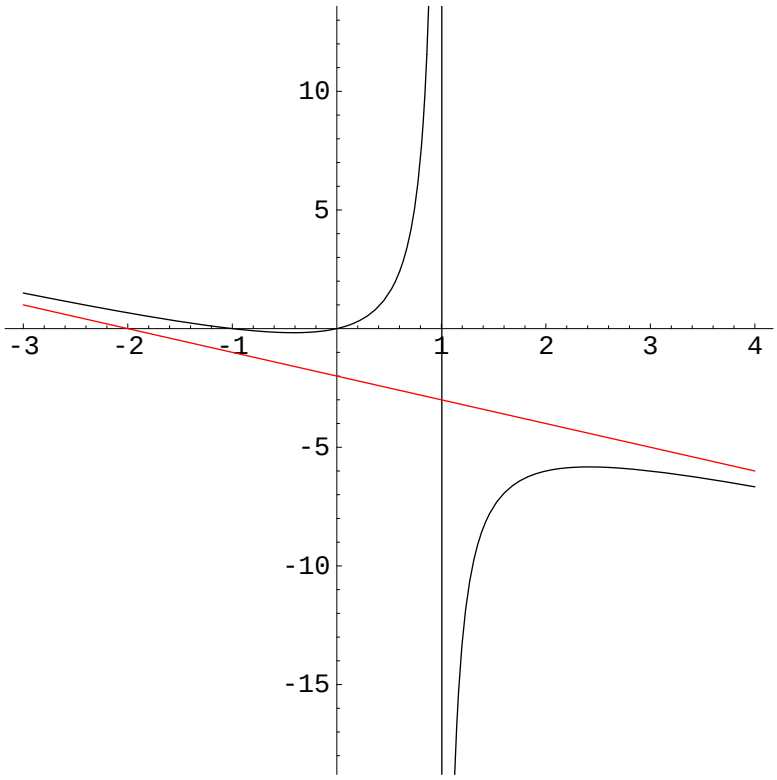

Figura 1: Gráfico de $f(x) = \frac{x^2+x}{1-x}$

Questão 2: (2,5 pontos)

(i) Encontre o polinômio de Taylor de ordem 2 em volta de $x_0 = 1$ da função

$$f(x) = x \ln x + x^2.$$

(ii) Prove que

$$|x \ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}| < \frac{(x-1)^3}{6}$$

para todo $x > 1$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = x\ln x + x^2 & f(1) = 1 \\ f'(x) = \ln x + 1 + 2x & f'(1) = 3 \\ f''(x) = \frac{1}{x} + 2 & f''(1) = 3 \\ f'''(x) = \frac{-1}{x^2} & \end{array}$$

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$P_2(x) = 1 + 3(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Sabemos que o erro de f é dado por $E(x) = \frac{f'''(\overline{x})}{3!}(x-1)^3$, para certo $\overline{x}$ entre 1 e x. Então temos, $E(x) = \frac{-1}{6\overline{x}^2}(x-1)^3$.

Se $x > 1$, temos $1 < \overline{x} < x$ e

$$\begin{array}{l} f(x) - P_2(x) = E(x) \\ (x\ln x + x^2) - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{6\overline{x}^2}(x-1)^3 \end{array}$$

Como $1 < \overline{x}$, $\frac{1}{\overline{x}^2} < 1$. Donde,

$$|x\ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}| < \tfrac{(x-1)^3}{6}$$

Questão 3: (2,5 pontos)

(i) Prove que

$$|\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a}| < \frac{e^b b}{4}(b-a)$$

para todo $b > a > 2$.

(ii) Calcule o limite

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)^{\frac{1}{\ln x}}$$

i) Considere a função $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Essa função é derivável e, pelo TVM, existe $a < c < b$ onde $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Substituindo

$$\frac{\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a}}{b-a} = \frac{e^c(c-1)}{c^2}$$

Como $2 < a < c$, $\frac{1}{c^2} < \frac{1}{4}$. Como $c < b$, $e^c < e^b$ e $c - 1 < b - 1 < b$. Daí:

$$\frac{\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a}}{b-a} = \frac{e^c(c-1)}{c^2} < \frac{e^b(b-1)}{4}(b-a) < \frac{e^b b}{4}(b-a)$$

ii) Considere a função $f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{\ln x}}$. Passando ao log,

$$\ln f(x) = \ln(x^2-1)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{\ln x}\ln(x^2-1)$$

Como log é uma função crescente e, usando L'Hospital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2-1)'}{\ln x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

então $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^2$.

Questão 4: (2,5 pontos) Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2.

(i) Encontre o raio da esfera e o lado do cubo que minimizam a soma de seus volumes.

(ii) Encontre o raio da esfera e o lado do cubo que maximizam a soma de seus volumes.

Sejam $r \geqslant 0$ o raio da esfera e $l \geqslant 0$ o lado do cubo. A soma das áreas de suas superfícies é dada por:

$$A = 6l^2 + 4\pi r^2 = 2$$

Soma dos volumes:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + l^3$$

Fazendo $6l^2 = 2 - 4\pi r^2$, temos $l = \sqrt{\frac{2-4\pi r^2}{6}}$. Assim, o problema se reduz a encontrar (caso existam) os pontos de máximo e mínimo da função $V : [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \Big(\frac{1-2\pi r^2}{3}\Big)^{3/2}$$

Como V é contínua e está definida no intervalo fechado e limitado $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, pelo teorema de Weierstrass conclui-se que existem pontos de máximo e de mínimo de V no referido intervalo. Além disso, como V é derivável, segue do teorema de Fermat que, se um destes pontos não for extremidade do intervalo, deverá ser um ponto crítico de V no interior do mesmo. Conclusão: V tem pontos de máximo e mínimo no intervalo $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, e tais pontos pertencem ao conjunto formado pelas extremidades do intervalo e pelos pontos críticos de V no interior do mesmo.

A função derivada de V, $V' : [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}] \to \mathbb{R}$, é dada por:

$$V'(r) = 4\pi r^2 - 2\pi r\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}} =$$
$$= 2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big)$$

Para encontrar os pontos críticos de V, observe que $2\pi r\left(2r-\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\right)=0$ se, e somente se, $r=0$ ou $2r=\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}$, i.e. se, e somente se $r=0$ ou $r=\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$. Assim, os pontos críticos de V são 0 e $r_0\doteq\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}\in(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$.

Além disso, como 0 e r_0 são os únicos zeros de V', e como V' é contínua, segue do teorema do valor intermediário que V' deve ter sinal constante nos intervalos $(0,r_0)$ e $(r_0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$. Mas $V'(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})=2>0$, e $\lim_{r\to 0}\left(2r-\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}<0$ (portanto $2\pi r\left(2r-\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\right)$ tem sinal negativo para $r>0$ e próximo de zero), o que nos permite concluir que V' tem sinal negativo em $(0,r_0)$ e positivo em $(r_0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$. Logo, pelo teste da derivada primeira, $r_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$ é o ponto de mínimo de V.

Por outro lado, temos: $V(0)=\sqrt{\frac{1}{27}}$ e $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})=\sqrt{\frac{1}{9\frac{\pi}{2}}}$. Como $\pi<4$, tem-se $\frac{\pi}{2}<2$, logo $9\frac{\pi}{2}<27$, donde $\frac{1}{9\frac{\pi}{2}}>\frac{1}{27}$, o que implica $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})>V(0)$. Assim, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é o ponto de máximo de V.