MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Primeira Prova — 28/03/2016

TESTES

1. Seja f uma função derivável definida em um intervalo aberto centrado em $x = 0$ e dada implicitamente pela equação

$$y^3 + xy^2 + y = 2\sin(x) + 2.$$

O valor de $f'(0)$ é

Resp.: a. $\frac{1}{4}$.

2. Para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+2x-3|}{x-1}, & \text{se } x < 1; \\ x + k, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$ o valor da constante k deve ser:

Resp.: e. -5.

3. Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, a única que passa pelo ponto $(1,0)$ é

Resp.: c. $x = 1 + 2y$.

4. Um ponto desloca-se sobre o gráfico da curva $y = \frac{1}{x}$. No instante em que ele se encontra no ponto $(2, \frac{1}{2})$, a taxa de variação de sua abscissa é $10m/s$. A taxa de variação da distância do ponto até a origem neste mesmo instante é

Resp.: c. $\dfrac{75}{2\sqrt{17}}$.

5. Considere as seguintes afirmações:

I. Se g é limitada e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ então

$$\lim_{x\to+\infty} |g(x)f(x)| = +\infty.$$

II. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

então f é derivável.

III. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é descontínua em x_0 e limitada então

$$f(x) = xg(x)\sin(x)$$

é derivável em $x_0 = 0$.

São corretas

Resp.: e. somente as afirmações (II) e (III).

6. Os limites $\lim_{x\to0} \dfrac{\cos(3x) - 1}{x^2}$ e $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x}$

Resp.: b. $-\frac{9}{2}$ e $-\infty$.

7. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin(\frac{1}{|x|})}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Em $x_0 = 0$ pode-se afirmar que f é

Resp.: d. derivável e $f'(0) = 0$.

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Primeira Prova — 28/03/2016

TESTES

1. Para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+4x+3|}{x+1}, & \text{se } x < -1; \\ x + k, & \text{se } x \geq -1. \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$ o valor da constante k deve ser:

Resp.: d. -1.

2. Os limites $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{x^2}$ e $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x}$

Resp.: e. valem $\frac{9}{2}$ e $-\infty$, respectivamente.

3. Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$, a única que passa pelo ponto $(2,0)$ é

Resp.: a. $x = 2 + 3y$.

4. Considere as seguintes afirmações:

I. Se g é limitada e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ então

$$\lim_{x\to+\infty} |g(x)f(x)| = +\infty.$$

II. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

então f é derivável.

III. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é descontínua em x_0 e limitada então

$$f(x) = xg(x)\sin(x)$$

é derivável em $x_0 = 0$.

São corretas

Resp.: d. somente as afirmações (II) e (III).

5. Um ponto desloca-se sobre o gráfico da curva $y = \frac{1}{x}$. No instante em que ele se encontra no ponto $(-2, -\frac{1}{2})$, a taxa de variação de sua abscissa é $10m/s$. A taxa de variação da distância do ponto até a origem neste mesmo instante é

Resp.: b. $-\dfrac{75}{2\sqrt{17}}$.

6. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin(\frac{1}{|x|})}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Em $x_0 = 0$ pode-se afirmar que f é

Resp.: e. derivável e $f'(0) = 0$.

7. Seja f uma função derivável definida em um intervalo aberto centrado em $x = 0$ e dada implicitamente pela equação

$$y^3 + xy^2 + y = -2\sin(x) - 2.$$

O valor de $f'(0)$ é

Resp.: e. $-\dfrac{3}{4}$.

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Primeira Prova — 28/03/2016

TESTES

1. Seja f uma função derivável definida em um intervalo aberto centrado em $x = 0$ e dada implicitamente pela equação

$$y^3 + xy^2 + y = 10\sin(x) + 10.$$

O valor de $f'(0)$ é

Resp.: e. $\dfrac{6}{13}$.

2. Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-3}$, a única que passa pelo ponto $(3,0)$ é

Resp.: b. $x = 3 + 4y$.

3. Os limites $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{x^2}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x - x\sqrt{x}}$

Resp.: d. $-\frac{9}{2}$ e $+\infty$.

4. Um ponto desloca-se sobre o gráfico da curva $y = \frac{1}{x}$. No instante em que ele se encontra no ponto $(3, \frac{1}{3})$, a taxa de variação de sua abscissa é $9m/s$. A taxa de variação da distância do ponto até a origem neste mesmo instante é

Resp.: c. $40\sqrt{\dfrac{2}{41}}$.

5. Para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x-6|}{x-2}, & \text{se } x < 2; \\ x + k, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$ o valor da constante k deve ser:

Resp.: e. -7.

6. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin(\frac{1}{|x|})}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Em $x_0 = 0$ pode-se afirmar que f é

Resp.: e. derivável e $f'(0) = 0$.

7. Considere as seguintes afirmações:

I. Se g é limitada e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ então

$$\lim_{x\to+\infty} |g(x)f(x)| = +\infty.$$

II. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

então f é derivável.

III. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é descontínua em x_0 e limitada então

$$f(x) = xg(x)\sin(x)$$

é derivável em $x_0 = 0$.

São corretas

Resp.: c. somente as afirmações (II) e (III).

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Primeira Prova — 28/03/2016

TESTES

1. Os limites $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{x^2}$ e $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x-x\sqrt{x}}$

Resp.: a. valem $\frac{9}{2}$ e $+\infty$, respectivamente.

2. Para que a função

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2+5x+6|}{x+2}, & \text{se } x<-2;\\ x+k, & \text{se } x\geq -2.\end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$ o valor da constante k deve ser:

Resp.: b. valem $\frac{9}{2}$ e $+\infty$.

3. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3\sin(\frac{1}{|x|})}{|x|}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

Em $x_0=0$ pode-se afirmar que f é

Resp.: c. derivável e $f'(0)=0$.

4. Seja f uma função derivável definida em um intervalo aberto centrado em $x=0$ e dada implicitamente pela equação

$$y^3+xy^2+y=-10\sin(x)-10.$$

O valor de $f'(0)$ é

Resp.: e. $-\dfrac{14}{13}$.

5. Um ponto desloca-se sobre o gráfico da curva $y=\frac{1}{x}$. No instante em que ele se encontra no ponto $(-3,-\frac{1}{3})$, a taxa de variação de sua abscissa é $9m/s$. A taxa de variação da distância do ponto até a origem neste mesmo instante é

Resp.: e. $-40\sqrt{\dfrac{2}{41}}$.

6. Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-4}$, a única que passa pelo ponto $(4,0)$ é

Resp.: d. $x=4+5y$.

7. Considere as seguintes afirmações:

I. Se g é limitada e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ então
$$\lim_{x\to+\infty}|g(x)f(x)|=+\infty.$$

II. Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é um função tal que
$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^2$$
então f é derivável.

III. Se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é descontínua em x_0 e limitada então
$$f(x)=xg(x)\sin(x)$$
é derivável em $x_0=0$.

São corretas

Resp.: d. somente as afirmações (II) e (III).

QUESTÃO DISSERTATIVA

Questão 1 (Valor: 3,0 pontos). Seja $f(x) = \operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)\operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x}\right)$ Determine os pontos em que f não é derivável. Nos demais pontos, calcule $f'(x)$.

A função $g(y) = \sqrt[3]{y}$ é derivável para todo $y \neq 0$.

Logo $\sqrt[3]{x^3+x^2}$ é derivável em todo $x \neq 0$ e $x \neq -1$ e $\sqrt[3]{x}$ é derivável em todo $x \neq 0$. Portanto se $x \neq 0$ e $x \neq -1$ temos que f é derivável e $f'(x) = \operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x}\right) \cdot \cos\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right) \cdot \dfrac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}} + \operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right) \cdot \cos\left(\sqrt[3]{x}\right) \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Para $x = 0$ consideramos o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)\cdot \operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^3+x^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3+x^2}{x^2}} \cdot \frac{\operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} = 1.1.1 = 1.$$

Logo f é derivável em $x_0 = 0$ e $f'(0) = 1$.

Para $x = -1$ consideramos o limite

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)\operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^3+x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x+1} \cdot \operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to -1} \underbrace{\frac{\operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\operatorname{sin}\left(\sqrt[3]{x}\right)}_{\to \operatorname{sin}(-1) < 0} = -\infty$$

Logo, f não é derivável em $x_0 = -1$.

Nota: