Questão 3.

I) Considere o triângulo retângulo ABC, em que os catetos são $AB = b$ e $AC = h$. Assuma que b e h variam com o tempo t e satisfazem a seguinte relação:

$$b = 3\pi + \operatorname{sen} h.$$

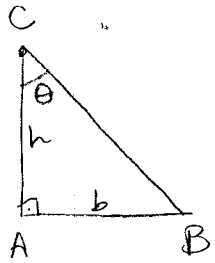
Num determinado instante t_0, tem-se $h = \pi$ e a taxa de variação da área do triângulo ABC é igual a 10π.

i) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação de h no instante t_0.

ii) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação do ângulo $\widehat{ACB}$ no instante t_0.

II) (1,5 ponto) Seja $f(x) = \big(\operatorname{tg}(5x) + 2\big)^4(\operatorname{arcsen} x + 1)$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 0$.

(I) $A = \frac{bh}{2}$ $\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{h}$ $\quad b = 3\pi + \operatorname{sen} h$



$b(t) = 3\pi + \operatorname{sen} h(t) \Rightarrow b'(t) = \cos h(t) \cdot h'(t)$

$A(t) = \frac{b(t)h(t)}{2} \Rightarrow A'(t) = \frac{b'(t)h(t) + b(t)h'(t)}{2}$

$\operatorname{tg}\theta(t) = \frac{b(t)}{h(t)} \Rightarrow \sec^2\theta(t)\,\theta'(t) = \frac{b'(t)h(t) - h'(t)b(t)}{h(t)^2}$

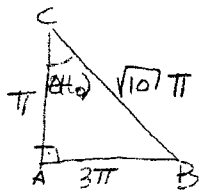
(i) $t = t_0 \quad h(t_0) = \pi \Rightarrow b(t_0) = 3\pi \qquad A'(t_0) = 10\pi$

$\Rightarrow b'(t_0) = -h'(t_0)$

$\Rightarrow A'(t_0) = \frac{b'(t_0)h(t_0) + b(t_0)h'(t_0)}{2}$

$10\pi = \frac{-h'(t_0)\pi + 3\pi h'(t_0)}{2} \Rightarrow \boxed{h'(t_0) = 10} \Rightarrow b'(t_0) = -10$

(ii) $t = t_0$



$\cos\theta(t_0) = \frac{\pi}{\sqrt{101}\pi} = \frac{1}{\sqrt{101}} \Rightarrow \sec^2\theta(t_0) = 10$

$\sec^2\theta(t_0)\,\theta'(t_0) = \frac{b'(t_0)h(t_0) - h'(t_0)b(t_0)}{h(t_0)^2} \Rightarrow 10\theta'(t_0) = \frac{-10\pi - 10\cdot 3\pi}{\pi^2}$

$\Rightarrow \boxed{\theta'(t_0) = -\frac{4}{\pi}}$

(II) $f'(x) = 4\big(\operatorname{tg}(5x)+2\big)^3 \sec^2(5x)\,5 \cdot (\operatorname{arcsen} x + 1) + \big(\operatorname{tg}(5x)+2\big)^4 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(0) = 4 \cdot 2^3 \cdot 5 + 2^4 = 176$

$f(0) = 2^4 = 16$

$\Rightarrow$ reta tangente por $(0,16)$: $\boxed{y = 16 + 176x}$

Questão 1. Calcule o limite ou justifique porque não existe:

a) (1,0 ponto) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x^2-4x+4}$

b) (1,0 ponto) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$

c) (1,0 ponto) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{tg}^2(x-1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{x-1}$

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)^2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}$ ($\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4} > 0$)

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})} = +\infty$ ($x-2 \to 0^+ > 0$; $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4} > 0$)

e $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})} = -\infty$ ($x-2 \to 0^- < 0$; $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4} > 0$)

Logo o limite não existe

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3x+1}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = -\dfrac{3}{2}$

$|x| = -x$ pois $x < 0$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{tg}^2(x-1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{sen}(x-1)}{\cos^2(x-1)} \cdot \dfrac{\mathrm{sen}(x-1)}{x-1} \cdot \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 0$

pois $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ é uma função limitada e

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{sen}(x-1)}{\cos^2(x-1)} \cdot \dfrac{\mathrm{sen}(x-1)}{x-1} = 0$ ($\mathrm{sen}(x-1) \to 0$; $\cos^2(x-1) \to 1$; $\frac{\mathrm{sen}(x-1)}{x-1} \to 1$)

Obs: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{sen}(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}\,u}{u} = 1$

$u = x-1$ $\quad x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

Questão 1. Calcule o limite ou justifique porque não existe:

a) (1,0 ponto) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x^2-6x+9}$

b) (1,0 ponto) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$

c) (1,0 ponto) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x-2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{x-2}$

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x^2-6x+9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)^2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right)}$

$(x-3) \to 0$ $\qquad \left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right) > 0$

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right)} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right)} = -\infty$

$(x-3) \to 0^+$, $(x-3) > 0$, $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right) > 0$; $(x-3) \to 0^-$, $(x-3) < 0$, $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right) > 0$

Logo o limite não existe.

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-5x+1}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1-x^2+5x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-5x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = -\dfrac{5}{2}$

$|x| = -x$ pois $x < 0$; $\frac{1}{x^2} \to 0$; $\frac{5}{x} \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to 0$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x-2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{\cos^2(x-2)} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = 0$

pois $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)$ é uma função limitada e

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{\cos^2(x-2)} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} = 0$

$\dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{\cos^2(x-2)} \to \dfrac{0}{1}$; $\dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} \to 1$

Obs: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$

$u = x-2$ $\qquad x \to 2 \Rightarrow u \to 0$

Questão 2. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\sqrt[3]{x-3}}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) (1,5 ponto) f é derivável em $x = 3$? E em $x = 0$?

b) (1,0 ponto) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

c) (1,0 ponto) Seja $g(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x-3)^2}$. A função $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável em $x = 3$? Por que?

a) Para $x=3$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\frac{\sqrt[3]{x-3}}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} = +\infty$$

($\operatorname{sen}x \to \operatorname{sen}3$; $\sqrt[3]{(x-3)^2} \to 0\ (>0)$)

Logo, f não é derivável em $x=3$.

Para $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\sqrt[3]{x-3} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x-3} = -\sqrt[3]{3} \neq 1 = f(0)$$

Portanto, f não é contínua em $x=0$. Consequentemente, f não é derivável em $x=0$

b) Para $x\neq 0$ e $x\neq 3$, f é derivável, pois $\operatorname{sen}x$, $\sqrt[3]{x-3}$ e x são deriváveis nesses pontos.

$$f'(x) = \frac{\left(\cos x\cdot\sqrt[3]{x-3} + \operatorname{sen}x\,\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}\right)x - \operatorname{sen}x\sqrt[3]{x-3}}{x^2}$$

c) $$\lim_{x\to 3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,\frac{\sqrt[3]{(x-3)\operatorname{sen}(x-3)^2}}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2}} = \frac{\operatorname{sen}3}{3}$$

(pois $\lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u} = 1$, com $u=(x-3)^2$, $x\to 3 \Rightarrow u\to 0$, e $\sqrt[3]{x}$ é contínua)

Logo, $h(x)$ é derivável em $x=3$

$\left(\text{e } h'(3) = \dfrac{\operatorname{sen}3}{3}\right)$

Questão 2. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\sqrt[3]{x-5}}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) (1,5 ponto) f é derivável em $x = 5$? E em $x = 0$?

b) (1,0 ponto) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

c) (1,0 ponto) Seja $g(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x-5)^2}$. A função $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável em $x = 5$? Por que?

a) Para $x=5$:

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen}x}{x} \frac{\sqrt[3]{x-5}}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen}x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} = +\infty$$

($\frac{\operatorname{sen}x}{x} \to \frac{\operatorname{sen}5}{5}$; $\sqrt[3]{(x-5)^2} \to 0$ (>0))

Logo, f não é derivável em $x = 5$.

Para $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x} \cdot \sqrt[3]{x-5} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x-5} = 1 \cdot \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5} \neq 1 = f(0)$$

Portanto, f não é contínua em $x=0$. Consequentemente, f não é derivável em $x=0$.

b) Para $x \neq 0$ e $x \neq 5$, f é derivável, pois $\operatorname{sen}x$, x, $\sqrt[3]{x-5}$ são deriváveis nesses pontos

$$f'(x) = \frac{\left(\cos x \cdot \sqrt[3]{x-5} + \operatorname{sen}x \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-5)^2}}\right)x - \operatorname{sen}x \sqrt[3]{x-5}}{x^2}$$

c) $$\lim_{x\to 5} \frac{h(x)-h(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen}x}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-5)\operatorname{sen}(x-5)^2}}{(x-5)}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen}x}{x} \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}(x-5)^2}{(x-5)^2}} = \frac{\operatorname{sen}5}{5}$$

(pois $\lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen}(x-5)^2}{(x-5)^2} = \lim \frac{\operatorname{sen}u}{u} = 1$, com $u=(x-5)^2$, $x\to 5 \Rightarrow u \to 0$, e $\sqrt[3]{x}$ é contínua)

Logo, $h(x)$ é derivável em $x=5$ ($e\ h'(5) = \frac{\operatorname{sen}5}{5}$)