Questão 2. (3 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-4}\,\text{sen}\Big((x+2)\sqrt{x^2+1}\Big)$.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

c) Determine $f'(x)$ em todos os pontos de seu domínio.

(a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \left(\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2(x+1)\sqrt{x^2+1}}{x-2}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\text{sen}\left((x+2)\sqrt{x^2+1}\right)}{(x+2)\sqrt{x^2+1}}\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot 1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, pois $\lim\limits_{x\to -2} (x+2)\sqrt{x^2+1} = 0$

e $(x+2)\sqrt{x^2+1} \neq 0$ se $x \neq -2$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}\cdot \text{sen}\left((x+2)\sqrt{x^2+1}\right) = 0$

$\to 0$ limitada

(c) $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$,

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x+2}{x^2-4}\right)\cdot \text{sen}\left((x+2)\sqrt{x^2+1}\right) + \left(\dfrac{2x+2}{x^2-4}\right)\cdot \dfrac{d}{dx}\,\text{sen}\left((x+2)\sqrt{x^2+1}\right) =$

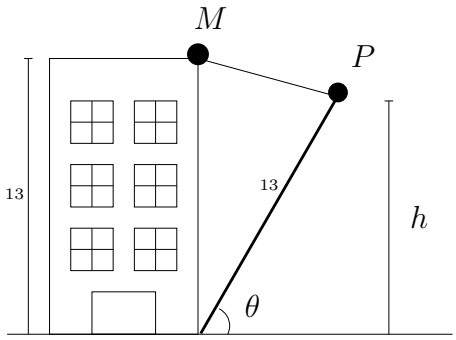
$= \dfrac{2(x^2-4)-(2x+2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}\cdot \text{sen}\left((x+2)\sqrt{x^2+1}\right) +$

$+ \left(\dfrac{2x+2}{x^2-4}\right)\cdot \cos\left((x+2)\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + \dfrac{2x(x+2)}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

Questão 3. (2,5 pontos) Um guindaste é montado conforme a figura. A extremidade P é presa a um cabo que é desenrolado pelo motor M. Quando P está a 5 m do solo, a taxa de variação instantânea com que o cabo é desenrolado é de 0,5 m/s. Calcule:

a) a taxa de variação da altura h nesse instante;

b) a taxa de variação do ângulo θ nesse mesmo instante.



(a) Se $x(t)$ é a distância do ponto P até a parede do prédio no instante t e $z(t)$ a distância de M a P neste mesmo instante, temos que

$$x^2(t) + h^2(t) = 13^2 \qquad \text{e} \qquad z(t) = \sqrt{x^2(t) + \big(13 - h(t)\big)^2}$$

Substituindo, obtemos que

$$z(t) \;=\; \sqrt{13^2 - x^2(t) + (13 - h(t))^2} = \sqrt{26(13 - h(t))} = \sqrt{26} \cdot \sqrt{13 - h(t)}$$

Derivando, obtemos que

$$z'(t) \;=\; \sqrt{26} \cdot \frac{-h'(t)}{2\sqrt{13 - h(t)}} = \frac{-\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{h'(t)}{\sqrt{13 - h(t)}}$$

Seja t_0 o instante ao qual o enunciado se refere. Então $h(t_0) = 5$ e $z'(t_0) = 0,5$ e portanto

$$0,5 = \frac{-\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{h'(t_0)}{\sqrt{8}}.$$

Logo, $h'(t_0) = -\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{26}} = -2\dfrac{\sqrt{13}}{13}.(m/s)$

(b) Como $\operatorname{sin}\theta(t) = \dfrac{h(t)}{13}$, derivando obtemos que

$$\cos\theta(t) \cdot \theta'(t) = \frac{h'(t)}{13}. \; (*)$$

No instante t_0 pedido, temos que $x(t_0) = 12$ e portanto $\cos\theta(t_0) = \frac{12}{13}$. Assim, substituindo em $(*)$

$$\frac{12}{13}\theta'(t_0) = -2\frac{\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{1}{13},$$

e portanto

$$\theta'(t_0) = -\frac{\sqrt{13}}{78}.(rad/s)$$

Questão 4. (1,5 ponto) Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(1,0)$.

Resolução: Temos que $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

A reta tangente ao gráfico em um ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$t_{x_0}: \quad y - \frac{x_0^2+1}{x_0-1} = \frac{x_0^2-2x_0-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0), \qquad x_0 \neq 1.$$

Queremos encontrar x_0 tal que $(1,0)$ satisfaça a equação de t_{x_0}:

$$-\frac{x_0^2+1}{x_0-1} = \frac{x_0^2-2x_0-1}{(x_0-1)^2}(1-x_0) \overset{x_0\neq 1}{\iff} x_0^2+1 = x_0^2-2x_0-1 \iff x_0 = -1.$$

Assim, a reta pedida é a tangente em $x_0 = -1$:

$$y+1 = \frac{2}{4}(x+1),$$

ou seja,

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Questão 1. (3 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+3x^2}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}}$.

a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calcule $\lim_{x\to0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to0^-} f(x)$. O que se pode dizer sobre $\lim_{x\to0} f(x)$?

c) Seja $g\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x|\, f(x), & \text{se } x \neq 0; \\ c, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Existe algum valor $c \in \mathbb{R}$ tal que g seja contínua em $x = 0$? E derivável (em $x = 0$)? Justifique.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\sqrt{1+3/x^2}}{x\left(\sqrt{2+1/x^2}-\sqrt{1-1/x+1/x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+3/x^2}}{\sqrt{2+1/x^2}-\sqrt{1-1/x+1/x^2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}-1} = +\infty$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+3x^2}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \dfrac{|x|\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{2x^2+1-x^2+x-1}$

$= \dfrac{|x|}{x} \dfrac{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1}$

Logo, $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1} = 2\sqrt{3}$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} -\dfrac{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1} = -2\sqrt{3}$.

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x\to0} f(x)$.

c) $\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} x\dfrac{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1} = 0$.

Portanto, deverá ter $c=0$, para que g seja contínua.

Neste caso,

$\lim_{x\to0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1} = 2\sqrt{3}$.

Isto é, g é derivável em $x=0$, se $c=0$. (e $f'(0)=2\sqrt{3}$) (*)

(Para $c\neq0$, g não é derivável em $x=0$, pois não é contínua nesse ponto)

(*) outra solução para g derivável em $x=0$, se $c=0$:

se $c=0$ então $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+1}$, para todo $x \in]-1,+\infty[$ (inclusive p/ $x=0$),

que é derivável em $x=0$, pelas regras de derivação (soma, produto, quociente e composta de funções deriváveis)