Questão 1) (Valor: 3.0) Calcule o limite ou explique por que não existe.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+2x^2-7x+4}}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x + 3x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}$

Resolução:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7}} &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7})(\sqrt{x+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7})(\sqrt{x+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^3+x-9}+\sqrt{x^3-7})}{(\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7})(\sqrt{x^3+x-9}+\sqrt{x^3-7})(\sqrt{x+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^3+x-9}+\sqrt{x^3-7})}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^3+x-9}+\sqrt{x^3-7})}{(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+2x^2-7x+4}}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{(x-1)^2(x+4)}}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|\sqrt{(x+4)}}{(x-1)(x+1)}$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|\sqrt{(x+4)}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)\sqrt{(x+4)}}{(x-1)(x+1)} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|\sqrt{(x+3)}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1-} \frac{-(x-1)\sqrt{(x+4)}}{(x-1)(x+1)} = \frac{-\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, tal limite não existe.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x + 3x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(\frac{\sqrt{x}}{x}\cos x + 3x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right))}{x(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\frac{\sqrt{x}}{x}\cos x + 3x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right))}{(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})}.$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} \overbrace{\cos x}^{\text{ltdo}} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}) = 0$

e $(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}) < 0$ para todo $x \neq 0$, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x + 3x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}} = -\infty$.

Questão 2. (Valor: 3.0) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})$. - A -

a) Calcule $f'(3)$.

b) Calcule $f'(0)$.

c) Seja $g(x) = \dfrac{(5 + f(x))(2x + 3\sec x)}{x + \mathrm{tg}\, x + 4}$, onde f é a função dada acima. Calcule $g'(0)$.

Solução. a) Seja $G(x) = \sqrt[3]{x}$. Se $x_0 \neq 0$, então G é derivável em x_0. Se $x_0 \neq 0$ e $x_0 \neq 1$, então $x_0^3 - x_0^2 = x_0^2(x_0 - 1) \neq 0$ e portanto G é derivável em x_0. Assim, se $x \neq 0$ e $x \neq 1$, podemos calcular $f'(x)$ usando a regra da cadeia e as regras de derivação para soma e produto:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 2x) \cdot \mathrm{sen}(x^{1/3}) + (x^3 - x^2)^{1/3} \cdot \cos(x^{1/3}) \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Logo

$$\begin{aligned} f'(3) &= \frac{1}{3}(18)^{-2/3} \cdot (21) \cdot \mathrm{sen}(3^{1/3}) + (18)^{1/3} \cdot \cos(3^{1/3}) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^{-2/3} \\ &= \frac{7}{3\sqrt[3]{12}}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{3}) + \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\cos(\sqrt[3]{3}). \end{aligned}$$

b) Como $G(x) = \sqrt[3]{x}$ não é derivável em $x_0 = 0$, vamos calcular $f'(0)$ usando a definição de derivada. Como $f(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x^4 - x^3}{x^3}} \cdot \frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}\, t}{t} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x^4 - x^3}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x - 1} = -1,$$

e portanto $f'(0) = -1$.

c) $g(x) = \dfrac{(5 + f(x))(2x + 3\sec x)}{x + \mathrm{tg}\, x + 4}$.

Sejam $h(x) = 2x + 3\sec x$ e $p(x) = x + \mathrm{tg}\, x + 4$. Então

$$g'(x) = \frac{[f'(x)h(x) + (5 + f(x))h'(x)]p(x) - [(5 + f(x))h(x)]p'(x)}{[p(x)]^2}$$

$$g'(0) = \frac{[f'(0)h(0) + (5 + f(0))h'(0)]p(0) - [(5 + f(0))h(0)]p'(0)}{[p(0)]^2}$$

e como $h'(x) = 2 + 3\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)$ e $p'(x) = 1 + \sec^2(x)$, temos

$h'(0) = 2 + 3\sec(0)\,\mathrm{tg}(0) = 2$ e $p'(0) = 1 + \sec^2(0) = 2$.

Portanto,

$$g'(0) = \frac{[(-1) \cdot 3 + 5 \cdot 2] \cdot 4 - [5 \cdot 3] \cdot 2}{16} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}.$$

Questão 2. (Valor: 3.0) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})$. - B -

a) Calcule $f'(2)$.

b) Calcule $f'(0)$.

c) Seja $g(x) = \dfrac{(4 + f(x))(3x + 2\sec x)}{x + \mathrm{tg}\, x + 4}$, onde f é a função dada acima. Calcule $g'(0)$.

Solução. a) Seja $G(x) = \sqrt[3]{x}$. Se $x_0 \neq 0$, então G é derivável em x_0. Se $x_0 \neq 0$ e $x_0 \neq 1$, então $x_0^3 - x_0^2 = x_0^2(x_0 - 1) \neq 0$ e portanto G é derivável em x_0. Assim, se $x \neq 0$ e $x \neq 1$, podemos calcular $f'(x)$ usando a regra da cadeia e as regras de derivação para soma e produto:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 2x) \cdot \mathrm{sen}(x^{1/3}) + (x^3 - x^2)^{1/3} \cdot \cos(x^{1/3}) \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Logo

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{1}{3}(4)^{-2/3} \cdot (8) \cdot \mathrm{sen}(2^{1/3}) + (4)^{1/3} \cdot \cos(2^{1/3}) \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^{-2/3} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{2}) + \frac{1}{3}\cos(\sqrt[3]{2}). \end{aligned}$$

b) Como $G(x) = \sqrt[3]{x}$ não é derivável em $x_0 = 0$, vamos calcular $f'(0)$ usando a definição de derivada. Como $f(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x^4 - x^3}{x^3}} \cdot \frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}\, t}{t} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x^4 - x^3}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x - 1} = -1,$$

e portanto $f'(0) = -1$.

c) $g(x) = \dfrac{(4 + f(x))(3x + 2\sec x)}{x + \mathrm{tg}\, x + 4}$.

Sejam $h(x) = 3x + 2\sec x$ e $p(x) = x + \mathrm{tg}\, x + 4$. Então

$$g'(x) = \frac{[f'(x)h(x) + (4 + f(x))h'(x)]p(x) - [(4 + f(x))h(x)]p'(x)}{[p(x)]^2}$$

$$g'(0) = \frac{[f'(0)h(0) + (4 + f(0))h'(0)]p(0) - [(4 + f(0))h(0)]p'(0)}{[p(0)]^2}$$

e como $h'(x) = 3 + 2\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)$ e $p'(x) = 1 + \sec^2(x)$, temos

$h'(0) = 3 + 2\sec(0)\,\mathrm{tg}(0) = 3$ e $p'(0) = 1 + \sec^2(0) = 2$.

Portanto

$$g'(0) = \frac{[(-1) \cdot 2 + 4 \cdot 3] \cdot 4 - [4 \cdot 2] \cdot 2}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}.$$

Questão 3) (Valor: 2.0) Seja f derivável num intervalo aberto I contendo $x = -1$ e tal que

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 + xf(x) = 2, \ \forall x \in I.$$

Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.

Resolução:

Se $y = f(-1)$, então $y^3 - y^2 - y = 2$

$$y^3 - y^2 - y - 2 = 0 \ \Rightarrow \ (y-2)\underbrace{(y^2+y+1)}_{\Delta < 0} = 0$$

$\Rightarrow y = 2$ é única solução real da equação.
$\Rightarrow f(-1) = 2$.

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 + xf(x) = 2$$

$$\Rightarrow \ 3(f(x))^2 f'(x) - 2f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) = 0$$

$$(x = -1) \ \Rightarrow \ 3(f(-1))^2 f'(-1) - 2f(-1)f'(-1) + f(-1) - 1.f'(-1) = 0$$

$$12f'(-1) - 4f'(-1) + 2 - f'(-1) = 0$$

$$\Rightarrow f'(-1) = -\frac{2}{7}$$

Portanto, a equação da reta tangente procurada é:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)),$$

ou seja,

$$y - 2 = -\frac{2}{7}(x+1) \text{ ou } 2x + 7y - 12 = 0.$$

Questão 3) (Valor: 2.0) Seja f derivável num intervalo aberto I contendo $x = 1$ e tal que

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 - xf(x) = 2, \ \forall x \in I.$$

Encontre $f(1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$.

Resolução:

Se $y = f(1)$, então $y^3 - y^2 - y = 2$

$$y^3 - y^2 - y - 2 = 0 \ \Rightarrow \ (y-2)\underbrace{(y^2 + y + 1)}_{\Delta < 0} = 0$$

$\Rightarrow y = 2$ é única solução real da equação.
$\Rightarrow f(1) = 2$.

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 - xf(x) = 2$$
$$\Rightarrow \ 3(f(x))^2 f'(x) - 2f(x)f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0$$
$$(x = 1) \ \Rightarrow \ 3(f(1))^2 f'(1) - 2f(1)f'(1) - f(1) - 1.f'(1) = 0$$
$$12f'(1) - 4f'(1) - 2 - f'(1) = 0$$
$$\Rightarrow f'(1) = \frac{2}{7}$$

Portanto, a equação da reta tangente procurada é:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1),$$

ou seja,

$$y - 2 = \frac{2}{7}(x - 1) \text{ ou } 2x - 7y + 12 = 0.$$

Questão 4) (Valor: 2.0) Num filtro com formato de cone, como na figura, um líquido escoa da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura H do líquido depositado na parte inferior é 8 cm, a altura h do líquido da parte superior é 10 cm e h está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de 2 cm por minuto. Calcule a taxa de variação de H em relação ao tempo nesse instante.

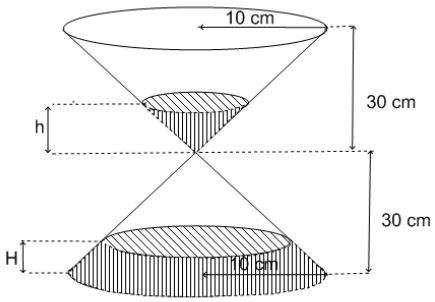

Figura 1

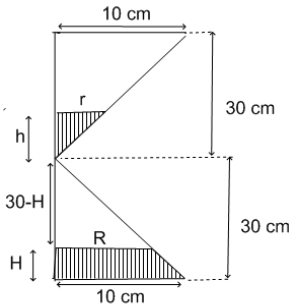

Figura 2

Resolução:

Por hipótese temos: $H(t_0) = 8$ cm, $h(t_0) = 10$ cm e $\dfrac{dh}{dt}(t_0) = -2$ cm/min.

Pela figura 2, obtemos as seguintes relações utilizando a semelhança dos triângulos:

$$\frac{r}{10} = \frac{h}{30} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h}{3}. \quad \text{E também } \frac{R}{10} = \frac{30-H}{30} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{30-H}{3}.$$

Sejam V_1 o volume do líquido depositado na parte superior e V_2 o volume do líquido na parte inferior.

$V_1(t) = \dfrac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t)$	$V_2(t) = \dfrac{\pi}{3}(10)^2 30 - \dfrac{\pi}{3}(R(t))^2(30 - H(t))$
$V_1(t) = \dfrac{\pi}{3}\dfrac{(h(t))^3}{9}$	$V_2(t) = \dfrac{\pi}{3}(10)^2 30 - \dfrac{\pi}{3}\dfrac{(30-H(t))^3}{9}$
$\dfrac{dV_1}{dt}(t) = \dfrac{\pi}{9}(h(t))^2 \dfrac{dh}{dt}(t)$	$\dfrac{dV_2}{dt}(t) = -\dfrac{\pi}{9}(30 - H(t))^2 \left(-\dfrac{dH}{dt}(t)\right)$
$\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = \dfrac{\pi}{9}(h(t_0))^2 \dfrac{dh}{dt}(t_0)$	$\dfrac{dV_2}{dt}(t_0) = -\dfrac{\pi}{9}(30 - H(t_0))^2 \left(-\dfrac{dH}{dt}(t_0)\right)$
$\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = \dfrac{\pi}{9}.100.(-2)$	$\dfrac{dV_2}{dt}(t_0) = \dfrac{\pi}{9}.484.\dfrac{dH}{dt}(t_0)$

Como $\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = -\dfrac{dV_2}{dt}(t_0)$, temos $\dfrac{\pi}{9}.100.(-2) = -\dfrac{\pi}{9}.484.\dfrac{dH}{dt}(t_0)$.

Ou seja, $\dfrac{dH}{dt}(t_0) = \dfrac{50}{121}$ cm/min.

Questão 4) (Valor: 2.0) Num filtro com formato de cone, como na figura, um líquido escoa da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura H do líquido depositado na parte inferior é 5 cm, a altura h do líquido da parte superior é 20 cm e h está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de 0,5 cm por minuto. Calcule a taxa de variação de H em relação ao tempo nesse instante.

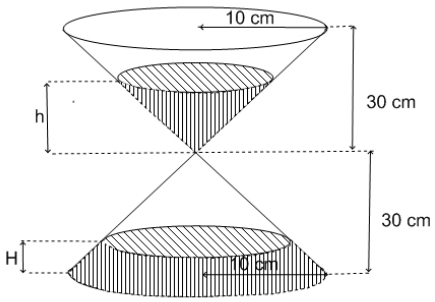

Figura 1

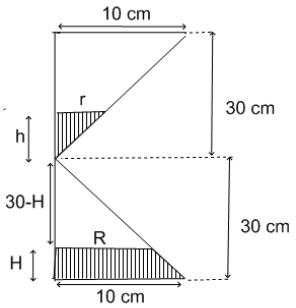

Figura 2

Resolução:

Por hipótese temos: $H(t_0) = 5$ cm, $h(t_0) = 20$ cm e $\dfrac{dh}{dt}(t_0) = -0,5$ cm/min.

Pela figura 2, obtemos as seguintes relações utilizando a semelhança dos triângulos:

$$\frac{r}{10} = \frac{h}{30} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h}{3}. \quad \text{E também } \frac{R}{10} = \frac{30-H}{30} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{30-H}{3}.$$

Sejam V_1 o volume do líquido depositado na parte superior e V_2 o volume do líquido na parte inferior.

$V_1(t) = \dfrac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t)$	$V_2(t) = \dfrac{\pi}{3}(10)^2 30 - \dfrac{\pi}{3}(R(t))^2(30 - H(t))$
$V_1(t) = \dfrac{\pi}{3}\dfrac{(h(t))^3}{9}$	$V_2(t) = \dfrac{\pi}{3}(10)^2 30 - \dfrac{\pi}{3}\dfrac{(30-H(t))^3}{9}$
$\dfrac{dV_1}{dt}(t) = \dfrac{\pi}{9}(h(t))^2 \dfrac{dh}{dt}(t)$	$\dfrac{dV_2}{dt}(t) = -\dfrac{\pi}{9}(30 - H(t))^2 \left(-\dfrac{dH}{dt}(t)\right)$
$\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = \dfrac{\pi}{9}(h(t_0))^2 \dfrac{dh}{dt}(t_0)$	$\dfrac{dV_2}{dt}(t_0) = -\dfrac{\pi}{9}(30 - H(t_0))^2 \left(-\dfrac{dH}{dt}(t_0)\right)$
$\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = \dfrac{\pi}{9}.400.(-0,5)$	$\dfrac{dV_2}{dt}(t_0) = \dfrac{\pi}{9}.625.\dfrac{dH}{dt}(t_0)$

Como $\dfrac{dV_1}{dt}(t_0) = -\dfrac{dV_2}{dt}(t_0)$, temos $\dfrac{\pi}{9}.400.(-0.5) = -\dfrac{\pi}{9}.625.\dfrac{dH}{dt}(t_0)$.

Ou seja, $\dfrac{dH}{dt}(t_0) = \dfrac{8}{25}$ cm/min.

Questão 1) (Valor: 3.0) Calcule o limite ou explique por que não existe.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7}}{\sqrt{x+2}-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}$

Resolução:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7}}{\sqrt{x+2}-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7})(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7})(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^3+x-9}-\sqrt{x^3-7})(\sqrt{x^3+x-9}+\sqrt{x^3-7})(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^3+x-9}+\sqrt{x^3-7})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^3+x-9}+\sqrt{x^3-7})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^3+x-9}+\sqrt{x^3-7})} = \frac{4}{2} = 2
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{(x-1)^2(x+3)}}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|\sqrt{(x+3)}}{(x-1)(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{|x-1|\sqrt{(x+3)}}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{(x-1)\sqrt{(x+3)}}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{|x-1|\sqrt{(x+3)}}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{-(x-1)\sqrt{(x+3)}}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-2}{2} = -1.$

Logo, tal limite não existe.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(\frac{\sqrt{x}}{x}\cos x + 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right))}{x(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\frac{\sqrt{x}}{x}\cos x + 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right))}{(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})}.$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} \underbrace{\cos x}_{\text{ltdo}} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}) = 0$ e $(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}) < 0$ para todo $x \neq 0$, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}} = -\infty.$