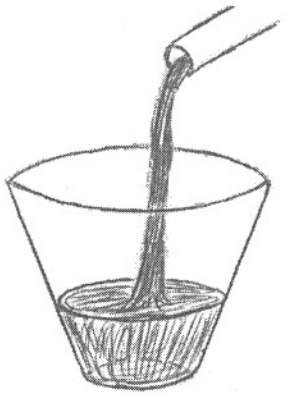
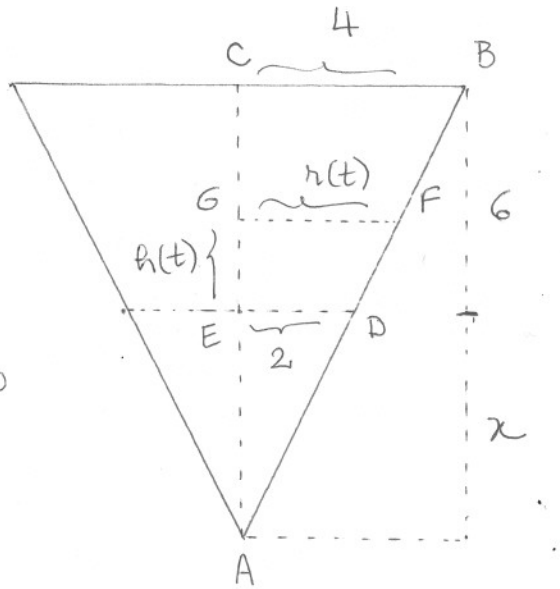
Questão A2) (Valor: 2.0) Despeja-se água , a uma taxa <u>não constante</u>, em um recipiente em forma de um tronco de cone. Os raios superior e inferior do recipiente são 4 cm e 2 cm, respectivamente, e a altura do recipiente é 6 cm. Determine a taxa de variação do nível de água (dentro do recipiente) no instante em que a profundidade da água (dentro do recipiente) é de 3 cm, sabendo que nesse instante a água é despejada a uma taxa de $20\,\text{cm}^3/\text{s}$. (Sugestão: estenda o recipiente para baixo para formar um cone.)



Corte vertical do cone estendido



$\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{6+x}{x} \Rightarrow x = 6$

$\Delta ADE \sim \Delta AFG \Rightarrow \frac{r(t)}{2} = \frac{6+h(t)}{6} \Rightarrow r(t) = \frac{1}{3}[6+h(t)]$

Volume do recipiente preenchido no instante t: $V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t)[6+h(t)] - \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 6$

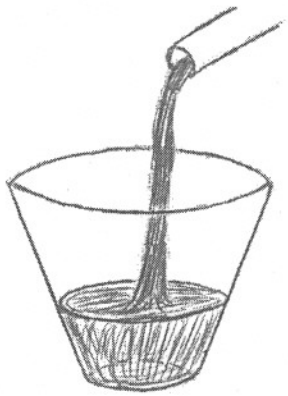
$$V(t) = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{1}{9}[6+h(t)]^3 - 24\right]$$

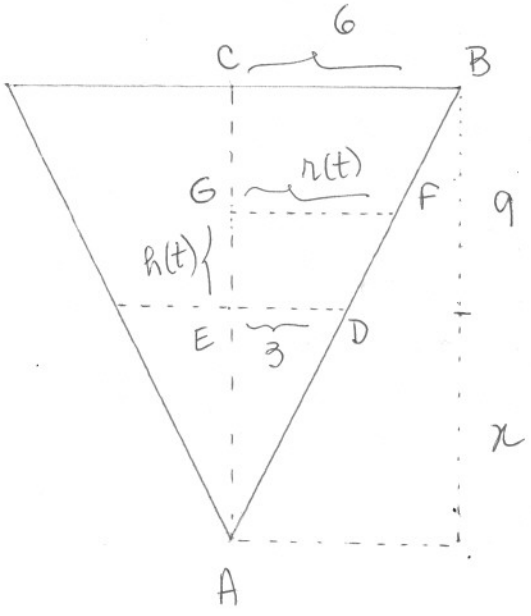
$$V'(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{9} \cdot 3[6+h(t)]^2 \cdot h'(t)$$

Instante t_0 / $h(t_0) = 3$ e $V'(t_0) = 20$

$$20 = \frac{\pi}{9} \cdot 9^2 \cdot h'(t_0) \Rightarrow \boxed{h'(t_0) = \frac{20}{9\pi}\ \text{cm/s}}$$

Questão B2) (Valor: 2.0) Despeja-se água , a uma taxa <u>não constante</u>, em um recipiente em forma de um tronco de cone. Os raios superior e inferior do recipiente são 6 cm e 3 cm, respectivamente, e a altura do recipiente é 9 cm. Determine a taxa de variação do nível de água (dentro do recipiente) no instante em que a profundidade da água (dentro do recipiente) é de 3 cm, sabendo que nesse instante a água é despejada a uma taxa de $25\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. (Sugestão: estenda o recipiente para baixo para formar um cone.)





$\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{9+x}{x} \Rightarrow x = 9$

$\Delta ADE \sim \Delta AFG \Rightarrow \frac{r(t)}{3} = \frac{9+h(t)}{9} \Rightarrow r(t) = \frac{1}{3}[9 + h(t)]$

Volume do recipiente preenchido no instante t $\Big\} V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t)[9+h(t)] - \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 9$

$V(t) = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{1}{9}[9+h(t)]^3 - 27\right]$

$V'(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{9} \cdot 3[9+h(t)]^2 \cdot h'(t)$

Instante t_0 / $h(t_0) = 3$ e $V'(t_0) = 25$

$25 = \frac{1}{9}\pi \cdot 12^2 \cdot h'(t_0) \Rightarrow \boxed{h'(t_0) = \frac{25}{16\pi}\ \frac{cm}{s}}$

Questão A3) (Valor: 3.0) Calcule, caso exista,

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x^3) - 3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \left(x\sqrt{9x^2+1} + 3x^2\right)$ (c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x - \sqrt{3x^2+x}}{(x-1)^2}$

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x\cos x}{\operatorname{sen} x^3 - 3x^2\cos\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{1/x} + \frac{\cos x}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} - 3\cos\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{0-3} = -\frac{1}{3},$$

pois $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{1/x} = \lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$,

$\lim_{x\to+\infty} (\cos x)\cdot\frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{sen} x^3)\frac{1}{x^2} = 0$

($\cos x$: limitada; $\frac{1}{x}$: vai a zero. $\operatorname{sen} x^3$: limitada; $\frac{1}{x^2}$: vai a zero)

(b) $\lim_{x\to-\infty} \left(x\sqrt{9x^2+1} + 3x^2\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(3x^2 - \sqrt{9x^4+x^2}\right) =$

($x<0$)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x^2)}{3x^2+\sqrt{9x^4+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1)}{3+\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{6}$$

(c) $$\frac{2x-\sqrt{3x^2+x}}{(x-1)^2} = \frac{x^2-x}{(2x+\sqrt{3x^2+x})(x-1)^2} = \frac{x}{(2x+\sqrt{3x^2+x})(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x}{2x+\sqrt{3x^2+x}}}{x-1} = +\infty, \text{ pois } \lim_{x\to 1} \frac{x}{2x+\sqrt{3x^2+x}} = \frac{1}{4} > 0,$$

$\lim_{x\to 1} (x-1) = 0$ e $(x-1) > 0 \ \forall x > 1$. Analogamente,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(2x+\sqrt{3x^2+x})(x-1)} = -\infty.$$ Logo, o limite pedido $\nexists$.

pois $(x-1)<0$ se $x<1$

Questão B3) (Valor: 3.0) Calcule, caso exista,

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x^5) - 2x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} (x\sqrt{4x^2+1} + 2x^2)$ (c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x - \sqrt{4x^2+5x}}{(x-1)^2}$

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x\cos x}{\operatorname{sen} x^5 - 2x^4\cos\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \frac{\cos x}{x^3}}{\frac{\operatorname{sen} x^5}{x^4} - 2\cos\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{0-2} = -\frac{1}{2},$$

pois $\lim_{t\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$,

$\lim_{x\to+\infty} (\cos x)\,\frac{1}{x^3} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{sen} x^5)\cdot\frac{1}{x^4} = 0$

($\cos x$: limitada; $\frac{1}{x^3}$: vai a zero; $\operatorname{sen} x^5$: limitada; $\frac{1}{x^4}$: vai a zero)

(b) $\lim_{x\to-\infty} \left(x\sqrt{4x^2+1} + 2x^2\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x^2 - \sqrt{4x^4+x^2}\right) =$

($x<0$)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^4 - 4x^4 - x^2}{2x^2 + \sqrt{4x^4+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1)}{2 + \sqrt{4+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{4}$$

(c) $$\frac{3x - \sqrt{4x^2+5x}}{(x-1)^2} = \frac{5x^2 - 5x}{(3x+\sqrt{4x^2+5x})(x-1)^2} = \frac{5x}{(3x+\sqrt{4x^2+5x})(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{5x}{3x+\sqrt{4x^2+5x}}}{x-1} = +\infty,$$ pois $\lim_{x\to 1} \frac{5x}{3x+\sqrt{4x^2+5x}} = \frac{5}{6} > 0$;

$\lim_{x\to 1} (x-1) = 0$ e $x-1>0$ $\forall\, x>1$. Analogamente,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{5x}{(3x+\sqrt{4x^2+5x})(x-1)} = -\infty.$$ Logo, o limite pedido $\nexists$.

pois $x-1<0$ se $x<1$

Questão A4) Sejam $f(x) = \dfrac{(3x-1)\cos(x^3-2x)}{\sqrt[4]{x^2+1}}$, para $x \in \mathbb{R}$;

$$g(x) = |\operatorname{tg}(5x^3)| \quad \text{e} \quad h(x) = g(x) + 3x + 2 \ , \text{ para } \ x \in \left]-\sqrt[3]{\frac{\pi}{10}}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{10}}\right[.$$

(1.5) (a) Calcule $f'(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(1.0) (b) A função g é derivável em $x_0 = 0$? Em caso afirmativo, calcule $g'(0)$.

(0.5) (c) A função $k(x) = f(x)h(x)$ é derivável em $x_0 = 0$? Em caso afirmativo, calcule $k'(0)$.

(a) Sejam $f_1(x) = (3x-1)\cos(x^3-2x)$ e $f_2(x) = \sqrt[4]{x^2+1} = (x^2+1)^{1/4}$. Então

$$f'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{[f_2(x)]^2} \ , \text{ onde } \ f_1'(x) = 3\cos(x^3-2x) + (3x-1)\Big(-\operatorname{sen}(x^3-2x)\Big)(3x^2-2);$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^{-3/4}2x = \frac{x}{\sqrt[4]{(x^2+1)^3}\ 2} \ . \text{ Portanto}$$

$$f'(x) = \frac{\Big[3\cos(x^3-2x) + (3x-1)\Big(-\operatorname{sen}(x^3-2x)\Big)(3x^2-2)\Big]\sqrt[4]{x^2+1} - (3x-1)\cos(x^3-2x)\Big[\frac{x}{\sqrt[4]{(x^2+1)^3}\ 2}\Big]}{\Big[\sqrt[4]{x^2+1}\Big]^2}$$

(b) Como a função módulo não é derivável em $\operatorname{tg}(5(x_0)^3) = 0$, <u>não podemos usar as regras de derivação</u>. Logo, precisamos usar a definição de derivada, isto é, calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\operatorname{tg}(5x^3)|}{x}$. Notemos que $\operatorname{tg}(5x^3) > 0$ em $]0, \sqrt[3]{\frac{\pi}{10}}[$ e $\operatorname{tg}(5x^3) < 0$ em $]-\sqrt[3]{\frac{\pi}{10}}, 0[$. Dessa forma, para calcular o referido limite temos que calcular os limites laterais. Calculando esses limites temos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|\operatorname{tg}(5x^3)|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}(5x^3)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(5x^3)}{\cos(5x^3)x} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\operatorname{sen}(5x^3)}{5x^3}\frac{5x^2}{\cos(5x^3)}\right];$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|\operatorname{tg}(5x^3)|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\operatorname{tg}(5x^3)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\operatorname{sen}(5x^3)}{\cos(5x^3)x} = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\operatorname{sen}(5x^3)}{5x^3}\frac{5x^2}{\cos(5x^3)}(-1)\right].$$

De $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\cos(5x^3)} = \dfrac{0}{1} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(5x^3)}{5x^3} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$ $\Big($ pois, $\lim\limits_{x\to 0}(5x^3) = 0$ e $5x^3 \neq 0$ para $x \in \left]-\sqrt[3]{\frac{\pi}{10}}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{10}}\right[\setminus \{0\}\Big)$ concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{5x^2}{\cos(5x^3)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{5x^2}{\cos(5x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\cos(5x^3)} = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(5x^3)}{5x^3} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(5x^3)}{5x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x^3)}{5x^3} = 1 .$$

Logo $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(5x^3)}{5x^3}\dfrac{5x^2}{\cos(5x^3)}\right] = 1.0 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(5x^3)}{5x^3}\dfrac{5x^2}{\cos(5x^3)}(-1)\right] = 1.0.(-1) = 0$, ou seja $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$. Portanto g é derivável em $x_0 = 0$ e $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$.

(c) Como g é derivável em $x_0 = 0$ temos que h é derivável em $x_0 = 0$. Assim, a função k é produto de funções deriváveis em $x_0 = 0$. Logo, k é derivável em $x_0 = 0$ e $k'(0) = f'(0)h(0) + f(0)h'(0)$. Dos itens anteriores temos que $f(0) = -1$, $f'(0) = 3$, $h(0) = g(0) + 2 = 2$ e $h'(0) = g'(0) + 3 = 3$. Portanto $k'(0) = 3.2 + (-1).3 = 6 - 3 = 3$.

Questão B4) Sejam $f(x) = \dfrac{(2x-1)\cos(x^3-4x)}{\sqrt[4]{x^2+1}}$, para $x \in \mathbb{R}$;

$$g(x) = |\,\mathrm{tg}(4x^3)\,| \qquad \text{e} \qquad h(x) = g(x) + 5x + 3 \ \text{ , para } \ x \in \left]-\sqrt[3]{\frac{\pi}{8}}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{8}}\right[.$$

(1.5) (a) Calcule $f'(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(1.0) (b) A função g é derivável em $x_0 = 0$? Em caso afirmativo, calcule $g'(0)$.

(0.5) (c) A função $k(x) = f(x)h(x)$ é derivável em $x_0 = 0$? Em caso afirmativo, calcule $k'(0)$.

(a) Sejam $f_1(x) = (2x-1)\cos(x^3-4x)$ e $f_2(x) = \sqrt[4]{x^2+1} = (x^2+1)^{1/4}$. Então

$$f'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{[f_2(x)]^2} \ \text{ , onde } \ f_1'(x) = 2\cos(x^3-4x) + (2x-1)\Big(-\mathrm{sen}(x^3-4x)\Big)(3x^2-4)\,;$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^{-3/4}2x = \frac{x}{\sqrt[4]{(x^2+1)^3}\ 2} \ . \text{ Portanto}$$

$$f'(x) = \frac{\Big[2\cos(x^3-4x) + (2x-1)\Big(-\mathrm{sen}(x^3-4x)\Big)(3x^2-4)\Big]\sqrt[4]{x^2+1} - (2x-1)\cos(x^3-4x)\Big[\frac{x}{\sqrt[4]{(x^2+1)^3}\ 2}\Big]}{\Big[\sqrt[4]{x^2+1}\Big]^2}$$

(b) Como a função módulo não é derivável em $\mathrm{tg}(4(x_0)^3) = 0$, <u>não podemos usar as regras de derivação</u>. Logo, precisamos usar a definição de derivada, isto é, calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\mathrm{tg}(4x^3)|}{x}$. Notemos que $\mathrm{tg}(4x^3) > 0$ em $]0, \sqrt[3]{\frac{\pi}{8}}\,[$ e $\mathrm{tg}(4x^3) < 0$ em $]-\sqrt[3]{\frac{\pi}{8}}, 0\,[$. Dessa forma, para calcular o referido limite temos que calcular os limites laterais. Calculando esses limites temos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|\mathrm{tg}(4x^3)|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{tg}(4x^3)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{sen}(4x^3)}{\cos(4x^3)x} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\mathrm{sen}(4x^3)}{4x^3}\frac{4x^2}{\cos(4x^3)}\right] ;$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|\mathrm{tg}(4x^3)|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\mathrm{tg}(4x^3)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\mathrm{sen}(4x^3)}{\cos(4x^3)x} = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\mathrm{sen}(4x^3)}{4x^3}\frac{4x^2}{\cos(4x^3)}(-1)\right] .$$

De $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{\cos(4x^3)} = \dfrac{0}{1} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}(4x^3)}{4x^3} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}\,u}{u} = 1$ $\Big($ pois, $\lim\limits_{x\to 0}(4x^3) = 0$ e $4x^3 \neq 0$ para $x \in \left]-\sqrt[3]{\frac{\pi}{8}}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{8}}\right[\setminus \{0\}\Big)$ concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^2}{\cos(4x^3)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{4x^2}{\cos(4x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{\cos(4x^3)} = 0 \ \ ; \ \ \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{sen}(4x^3)}{4x^3} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{sen}(4x^3)}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(4x^3)}{4x^3} = 1 .$$

Logo $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{\mathrm{sen}(4x^3)}{4x^3}\dfrac{4x^2}{\cos(4x^3)}\right] = 1\,.0 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{\mathrm{sen}(4x^3)}{4x^3}\dfrac{4x^2}{\cos(4x^3)}(-1)\right] = 1\,.0\,.(-1) = 0$, ou seja $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$. Portanto g é derivável em $x_0 = 0$ e $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-x_0} = 0\,.$

(c) Como g é derivável em $x_0 = 0$ temos que h é derivável em $x_0 = 0$. Assim, a função k é produto de funções deriváveis em $x_0 = 0$. Logo, k é derivável em $x_0 = 0$ e $k'(0) = f'(0)h(0) + f(0)h'(0)$. Dos itens anteriores temos que $f(0) = -1$, $f'(0) = 2$, $h(0) = g(0) + 3 = 3$ e $h'(0) = g'(0) + 5 = 5$. Portanto $k'(0) = 2\,.\,3 + (-1)\,.\,5 = 6 - 5 = 1$.

MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

1º semestre de 2007 - 1ª PROVA - 10/04/2007

TURMA:_____

Nome_____

Assinatura_____

Número USP _____ Professor: _____

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
A-Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS

Nesta prova, não se pode usar a Regra de L'Hospital

Questão A1) (Valor: 2.0) Dentre as retas que são, simultaneamente, tangentes ao gráfico da função $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ e paralelas à reta $y = 3x + 1$, determine, caso existam, aquelas que passam pelo ponto $(-1, 6)$.

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1)$

$(r): y = 3x + 1$

t : reta tangente ao Gr f em $(x_0, f(x_0))$ $\quad (t): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Temos $t \parallel r \iff f'(x_0) = 3 \iff 3(x_0^2 + 2x_0 + 1) = 3 \iff \begin{cases} x_0 = 0 \\ \text{ou} \\ x_0 = -2 \end{cases}$

Calculando: $f(0) = 5$ e $f(-2) = 3$

Retas tangentes ao Gr f que são paralelas a r

$\begin{cases} (t_1)\ y - 5 = 3(x - 0) \\ \quad (t_1): y = 3x + 5 \\ (t_2)\ y - 3 = 3(x + 2) \\ \quad (t_2): y = 3x + 9 \end{cases}$

Passam por $(-1, 6)$?

- $(-1, 6) \notin t_1$, pois $x = -1$ na eq. de $t_1 \Rightarrow y = 2$
- $(-1, 6) \in t_2$, pois $x = -1$ na eq de $t_2 \Rightarrow y = 6$

Logo, a reta procurada é a reta de equação

$y = 3x + 9$ #

MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

1º semestre de 2007 - 1ª PROVA - 10/04/2007

TURMA:_____

Nome_____

Assinatura_____

Número USP _____ Professor: _____

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
B-Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS

Nesta prova, não se pode usar a Regra de L'Hospital

Questão B1) (Valor: 2.0) Dentre as retas que são, simultaneamente, tangentes ao gráfico da função $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 8$ e paralelas à reta $y = 4x + 1$, determine, caso existam, aquelas que passam pelo ponto $(-1, 8)$.

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$

(r): $y = 4x + 1$

t: reta tangente ao Grf em $(x_0, f(x_0))$ $\quad (t)$: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Temos $t \parallel r \iff f'(x_0) = 4 \iff 3x_0^2 + 6x_0 + 4 = 4$

$\iff 3(x_0^2 + 2x_0) = 0 \iff x_0 = 0$ ou $x_0 = -2$

Calculando $f(0) = 8$ e $f(-2) = 4$

Retas tangentes ao Grf que são paralelas a r

(t_1) $y - 8 = 4(x - 0)$

$y = 4x + 8$

(t_2) $y - 4 = 4(x + 2)$

$y = 4x + 12$

Passam por $(-1, 8)$?

- $(-1, 8) \notin t_1$, pois $x = -1$ na eq de $t_1 \Rightarrow y = 4$
- $(-1, 8) \in t_2$, pois $x = -1$ na eq de $t_2 \Rightarrow y = 8$

Logo, a reta procurada é a reta de equação $y = 4x + 12$.