

1ª Prova de MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I
04/04/2006

(A)

Nome : GABARITO
NºUSP : _____ RG : _____
Turma : _____ Professor : _____
Assinatura : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS

Não é permitido usar as regras de L'Hospital

1ª Questão:

a) (1,0 ponto) Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt[4]{2x} - 1}{\sqrt{2x} - 1}$

Resposta : 0

b) (1,0 ponto) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x \cos(\sqrt{x})}{x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1}$

Resposta : 3

c) (1,0 ponto) Mostre, através de um exemplo, que a afirmação abaixo é FALSA:

"Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ então $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$ "

Se $x > 1/2$

$$a) \frac{\sqrt[4]{2x} - 1}{\sqrt{2x} - 1} = \frac{\sqrt[4]{2x} - 1}{\sqrt{2x} - 1} \cdot \frac{\sqrt[4]{2x} + 1}{\sqrt[4]{2x} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2x} + 1}{\sqrt{2x} + 1} =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{2x - 1}{\sqrt{2x} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2x} + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x} + 1} = \frac{\sqrt{2x} - 1}{(\sqrt[4]{2x} + 1)(\sqrt{2x} + 1)}$$

Logo $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt[4]{2x} - 1}{\sqrt{2x} - 1} = \frac{0}{4} = 0$

(Veja Obs depois de b))

$$(*) \text{ Usei } (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\text{e } (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x \cos(\sqrt{x})}{x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{x^{\cancel{4}}} \cdot \frac{3 + \frac{\cos(\sqrt{x})}{x^{\cancel{2}}} \rightarrow 0}{\underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{x^{\cancel{3}}}}_{\rightarrow 0}} = 3$$

Justificativas:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{pois } |\cos(\sqrt{x})| \leq 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{pois } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$(\text{limite fundamental}) \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

— " —

Obs: Em a) e b) usamos as propriedades de limite de soma, produto, quociente de funções e também que $g(x) = \sqrt{x}$ é contínua

— " —

c) veja prova B

2ª Questão:

a) (1,0 ponto) Se $f(x) = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{1 + \sec(5x)}$, dê a expressão de $f'(x)$.

b) (1,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Decida se f é contínua em $x = 0$ e se f é derivável em $x = 0$.

$$a) f'(x) = \frac{\frac{1}{3}(\operatorname{tg} x)^{-2/3} (\sec^2 x) [1 + \sec(5x)] - (\operatorname{tg} x)^{1/3} (\sec(5x)) (\operatorname{tg}(5x)) \cdot 5}{[1 + \sec(5x)]^2}$$

b) CONTINUIDADE

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{|x| \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

do limite fundamental

$$= 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e $f(0) = 0$, concluímos que f é contínua em $x = 0$.

DERIVADA EM $x=0$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x \sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x \cdot |x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (*)$$

FAZENDO OS LIMITES LATERAIS, OBTÉMOS:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x \cdot |x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x \cdot |x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1$$

Como os limites laterais são distintos, não existe o limite (*) e concluímos que f não é derivável em $x = 0$.

3ª Questão: (2,0 pontos) Considere a função

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-1}.$$

Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(0,0)$.
(Indique claramente os pontos de tangência).

• A EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE f NO PONTO $(a, f(a))$ É

$$Y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

OU SEJA:

$$Y - \left(\frac{3a+1}{a-1} \right) = \frac{-4}{(a-1)^2} \cdot (x - a)$$

• ESTA RETA DEVE PASSAR PELO PONTO $(X, Y) = (0, 0)$ $\therefore$

$$0 - \left(\frac{3a+1}{a-1} \right) = \frac{-4}{(a-1)^2} \cdot (0 - a)$$

$$(3a+1)(a-1) = -4a$$

$$3a^2 - 3a + a - 1 = -4a$$

$$3a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{6} \begin{cases} a = \frac{-2+4}{6} \\ a = \frac{-2-4}{6} \end{cases}$$

• ASSIM, AS RETAS TANGENTES SÃO DUAS:

$$Y + 3 = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$$Y = -9x$$

$$\text{PTO. DE TANGÊNCIA} = \left(\frac{1}{3}, -3\right)$$

e

$$Y - 1 = 1(x + 1)$$

$$Y = -x$$

$$\text{PTO. DE TANGÊNCIA} = (-1, 1)$$

(A)

4ª Questão: (2,5 pontos) Uma mangueira está enchendo um tanque de gasolina que tem o formato de um cilindro deitado de diâmetro $2m$ e comprimento $3m$. A figura representa a seção transversal do tanque no instante t ; o ângulo θ varia de zero (tanque vazio) a π (tanque cheio).

No instante em que a altura h do líquido é de $0,5m$, a vazão é de $0,9m^3/min$.

a) Dê a taxa de variação do ângulo θ no instante em que a altura do líquido é de $0,5m$.

b) Dê a taxa de variação da altura h do líquido neste mesmo instante.

a) $h(t) = 1 - \cos(\theta(t))$

Seja t_0 tal que $h(t_0) = \frac{1}{2}$ e

$\frac{dV}{dt}(t_0) = 0,9$. Então

$\frac{1}{2} = 1 - \cos(\theta(t_0))$, daí

$\cos(\theta(t_0)) = \frac{1}{2}$, assim $\theta(t_0) = \frac{\pi}{3}$

O volume é dado por

$V(t) = 3$ (área do setor circular ABC - área do $\triangle ABC$)

$= 3 \left(\frac{2\theta(t)}{2} - \frac{2\sin(\theta(t))\cos(\theta(t))}{2} \right)$

$= \frac{3}{2} (2\theta(t) - \sin(2\theta(t)))$

$0,9 = \frac{dV}{dt}(t_0) = \frac{3}{2} \left(2 \frac{d\theta}{dt}(t_0) - 2\cos(2\theta(t_0)) \frac{d\theta}{dt}(t_0) \right)$

$= \frac{3}{2} (2 + 1) \frac{d\theta}{dt}(t_0) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}(t_0) = \frac{0,9 \cdot 2}{9} = 0,2 \text{ rad/min}$

b) $\frac{dh}{dt}(t_0) = \sin(\theta(t_0)) \frac{d\theta}{dt}(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{\sqrt{3}}{10} \text{ m/min}$

