1ª Prova de MAT 2453
12/04/2005 - Escola Politécnica

A ímpar e B par

Questão 1. (3,0) Calcule:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right]$.

(b) $\lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)+\frac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x-5}\right]$.

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^x$.

(a) $\forall x>0$: $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}$.

Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, segue $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1=2$. Portanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(b) $\lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)+\frac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x-5}\right]$.

Observe que $-1\le\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)\le 1$ e $\lim_{x\to 5}(x^2-25)=0$. Sabemos que o produto de uma função limitada por uma que vai a zero também vai a zero, donde:

$$\lim_{x\to 5}(x^2-25)\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right)=0$$

Agora,

$$\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x+5)\frac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x^2-25}(A)$$

O limite $\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x^2-25}$ é o *limite fundamental* e tende a 1. Como $\lim_{x\to 5}(x+5)=10$, temos que o limite em (A) vale 10.

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{2}}\right)^x$.

Fazendo $\frac{x+2}{2}=y$ e substituindo, temos que o limite acima equivale a $\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y-2}=\lim_{y\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^2\times\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2}=e^2$.

Veja que $\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e$ e $\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2}=1$.

Questão 2. (2,0) Sabendo que a reta $2x - 3y + 1 = 0$ é tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{a}{x}$, determine o valor de a e dê as coordenadas do ponto de tangência.

Equação da reta tangente a uma função derivável f num ponto x_0:

$$r_{x_0,x} := y - f(x_0) = f'(x_0)\Big(x - x_0\Big)$$

Para $f(x) = \frac{a}{x}$, temos $f'(x) = \frac{-a}{x^2}$. Donde, a família de retas tangentes a f é dada por

$$r_{x_0,x} := y - \frac{a}{x_0} = \frac{-a}{x_0^2}\Big(x - x_0\Big)$$

Como $2x - 3y + 1 = 0$ é membro da familia acima, temos, igualando coeficientes angulares e lineares,

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{-a}{x_0^2}(x - x_0) + \tfrac{a}{x_0} \\ y &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \\ \\ \tfrac{-a}{x_0^2} &= \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{a}{x_0} + \tfrac{a}{x_0} &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Donde, $x_0 = -\frac{1}{4}$ e $a = -\frac{1}{24}$.

Questão 3. (2,0) A base b de um retângulo diminui a uma taxa de 2 cm/s, enquanto a altura h aumenta a uma taxa de 2 cm/s. Encontre as taxas de variação para a área, o perímetro e a diagonal do retângulo quando $b = 12$ cm e $h = 5$cm.

$A = bh$, $P = 2b + 2h$, $d = \sqrt{b^2 + h^2}$, onde A = área, P = perímetro, h = altura, b = base e d = diagonal. Para $t = t_0$, $b(t_0) = 12$, $h(t_0) = 5$, $b'(t_0) = -2$ e $h'(t_0) = 2$.

Daí:

$$\begin{aligned} P'(t_0) &= 2[b'(t_0) + h'(t_0)] = 0, \\ A'(t_0) &= b'(t_0)h(t_0) + b(t_0)h'(t_0) = 14, \\ d'(t_0) &= \frac{b'(t_0)b(t_0) + h'(t_0)h(t_0)}{\sqrt{b(t_0)^2 + h(t_0)^2}} = -\frac{14}{13}. \end{aligned}$$

Questão 4. (2,0) Seja $f(x) = x + e^{3x}$ e seja g a funação inversa de f.

(a) Calcule $g(1)$ e $g'(1)$.
(b) Seja $h(x) = g'(x)$. Calcule $h'(1)$.

$$f(g(x)) = x$$

Donde, pela regra da cadeia e do produto,

$$f'(g(x))g'(x) = x' = 1$$
$$f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) = x'' = 0(\star)$$

Substituindo em valores onde $f'(g(x)) =\neq 0$.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Agora, $f'(x) = 1 + 3e^{3x}$. Donde, temos:

$$f(0) = 0 + e^{3.0} = 1,\ g(1) = 0$$
$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+3e^{3x}}(0) = \frac{1}{4}$$

$h'(1) = g''(1)$. Substituindo em $\star$ para $g(1) = 0$ e $f''(x) = 9e^{3x}$

$$f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) = 0$$
$$9e^{3x}_{(x=0)}(g'(1))^2 + (1 + 3e^{3x})_{(x=0)}g''(1) = 0$$
$$9(\tfrac{1}{4})^2 + (1 + 3e^{3.0})g''(1) = 0$$
$$\tfrac{9}{16} + 4g''(1) = 0$$
$$g''(1) = -\tfrac{9}{64}$$