MAP3121 PARA P2:

- AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS:

INTRODUÇÃO: PRA QUÊ UTILIZAREMOS O QUE SERÁ APRENDIDO?

RESP.: NECESSIDADE DE SE AJUSTAR A FUNÇÕES TABELADAS UMA FUNÇÃO QUE SEJA UMA "BOA APROXIMAÇÃO" PARA OS VALORES TABELADOS E QUE NOS PERMITA "EXTRAPOLAR" COM CERTA MARGEM DE SEGURANÇA.

(FONTE: "NOÇÕES DE CÁLCULO NUMÉRICO")

Ⓐ CASO DISCRETO

1° PASSO: OBSERVAR A TABELA DE PONTOS X E f(x);

2° PASSO: DESENHAR O GRÁFICO COM OS PONTOS;

3° PASSO: OBSERVAR SE EXISTE ALGUM TIPO DE COMPORTAMENTO DESSES PONTOS; (CASO POSITIVO CHAMAR DE $g(x)$ A FUNÇÃO QUE "ENGLOBA" ESSES PONTOS)

4° PASSO: ENCONTRAR AS CONSTANTES $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ TAIS QUE A FUNÇÃO: $\phi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_N g_N(x)$ SEJA A MAIS PRÓXIMA DE $f(x)$

(OU SEJA $f(x) - \phi(x)$ TEM QUE SER O MENOR POSSÍVEL!)

5° PASSO: APLICAR O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA ENCONTRAR AS INCÓGNITAS $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$!

Ⓑ CASO CONTÍNUO

1° PASSO: PROCURAR A FUNÇÃO $f(x)$ CONTÍNUA NUM INTERVALO $[a,b]$ (ESSA FUNÇÃO É DADA NO ENUNCIADO)

2° PASSO: ESCOLHER AS FUNÇÕES $g_1(x), g_2(x), \dots, g_N(x)$ (TODAS CONTÍNUAS EM $[a,b]$) (TAMBÉM SÃO DADAS NO ENUNCIADO, GERALMENTE)

3° PASSO: DETERMINAR "N" CONSTANTES $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ DE MODO QUE A FUNÇÃO $\phi = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_N g_N(x)$ SE APROXIME AO MÁXIMO DE $f(x)$ NO INTERVALO $[a,b]$.

4° PASSO: APLICAR MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA QUE $\phi(x) - f(x)$ SEJA MÍNIMO E ENCONTRAR AS CONSTANTES $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$!

VAMOS APRENDER ESSE MÉTODO?

- MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (MMQ)

Ⓐ PARA O CASO DISCRETO:

IDEIA: O CONJUNTO DE $g(x)$ SERÃO VETORES TAIS QUE: $\langle g_i, g_j \rangle$ É:

$$\begin{cases} \bullet = 0 & \text{SE } i \neq j \\ \bullet \neq 0 & \text{SE } i = j \end{cases}$$

ASSIM A MATRIZ "m x m" TERÁ UMA ÚNICA SOLUÇÃO QUE QUEREMOS ENCONTRAR!

EXEMPLO 1: ACHE $c = a_1 v^{(1)} + a_2 v^{(2)}$ MAIS PRÓXIMO DE b COM O PRODUTO INTERNO $\langle U, V \rangle = U_1 V_1 + 2 U_2 V_2 + U_3 V_3$

DADOS:

- $v^{(1)} = (1, 1, 1)$
- $v^{(2)} = (-1, 2, 3)$
- $b = (3, 4, 5)$

1° PASSO: ENTENDER A MATRIZ A SER TRABALHADA:

$$\begin{cases} \langle v^{(1)}, v^{(1)} \rangle a_1 + \langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle a_2 = \langle v^{(1)}, b \rangle \\ \langle v^{(2)}, v^{(1)} \rangle a_1 + \langle v^{(2)}, v^{(2)} \rangle a_2 = \langle v^{(2)}, b \rangle \end{cases}$$

INCÓGNITAS

PRECISO ENCONTRAR

2° PASSO: ENCONTRAR OS PRODUTOS INTERNOS

I) $\langle v^{(1)}, v^{(1)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4$

II) $\langle v^{(2)}, v^{(1)} \rangle = \langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 6$

III) $\langle v^{(2)}, v^{(2)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 18$

IV) $\langle v^{(1)}, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 16$

V) $\langle v^{(2)}, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 28$

3° PASSO: SUBSTITUIR NA MATRIZ:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 28 \end{bmatrix}$$

4° PASSO: RESOLVER:

$$\left\langle \begin{cases} a_1 = \frac{10}{3} \\ a_2 = \frac{4}{9} \end{cases} \right\rangle \quad C = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

MAIS SE APROXIMA DE b

(B) PARA O CASO CONTÍNUO: EXEMPLO 2

APROXIMAR $f(x) = 4x^3$ POR UM POLINÔMIO DO PRIMEIRO GRAU, UMA RETA, NO INTERVALO $[a, b] = [0, 1]$.

$$\phi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 \cdot g_2(x)$$

DADO: $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$\langle g_1(x), g_1(x) \rangle \alpha_1 + \langle g_1(x), g_2(x) \rangle \alpha_2 = \langle f(x), g_1(x) \rangle$$

$$\langle g_2(x), g_1(x) \rangle \alpha_1 + \langle g_2(x), g_2(x) \rangle \alpha_2 = \langle f(x), g_2(x) \rangle$$

I) $\langle g_1(x), g_1(x) \rangle = \int_a^b g_1^2(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$

II) $\langle g_1(x), g_2(x) \rangle = \int_a^b g_1(x) \cdot g_2(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

III) $\langle g_2(x), g_2(x) \rangle = \int_a^b g_2^2(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

IV) $\langle f(x), g_1(x) \rangle = \int_a^b g_1(x) f(x)\,dx = \int_0^1 4x^3\,dx = x^4\Big|_0^1 = 1$

V) $\langle f(x), g_2(x) \rangle = \int_a^b f(x) g_2(x)\,dx = \int_0^1 4x^4\,dx = \frac{4}{5} x^5\Big|_0^1 = \frac{4}{5}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\left\langle \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{4}{5} \\ \alpha_2 = \frac{18}{5} \end{cases} \right\rangle \quad \begin{aligned} \phi(x) &= \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 \cdot g_2(x) \\ \phi(x) &= \frac{18}{5} x - \frac{4}{5} \end{aligned}$$

- ANÁLISE HARMÔNICA:

INTRODUÇÃO: PRA QUE UTILIZAREMOS O QUÊ SERÁ APRENDIDO?

"QUANDO A FUNÇÃO f A SER APROXIMADA É PERIÓDICA, É CONVENIENTE UTILIZAR PARA A FUNÇÃO APROXIMADORA UMA FAMÍLIA DE FUNÇÕES TAMBÉM PERIÓDICAS COM O MESMO PERÍODO DA QUE SE QUER APROXIMAR".

(NOÇÕES BÁSICAS DE CÁLCULO NUMÉRICO, vol. 2, pág 24)

* FAMÍLIA DE FUNÇÕES UTILIZADA:

- $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$ ... $\cos Nx$
- $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 2x$, $\operatorname{sen} 3x$ ... $\operatorname{sen} Nx$

* IDEIA DO PROBLEMA:

TEM QUE SER PERIÓDICA

$$\boxed{f(x)} \xrightarrow[\text{PELO m.m.q.}]{\text{VOU APROX. P/}} \boxed{g(x)}$$

O QUE É DADO

$$a_0 + \sum_{K=1}^{N} (a_K \cos Kx + b_K \operatorname{sen} Kx)$$

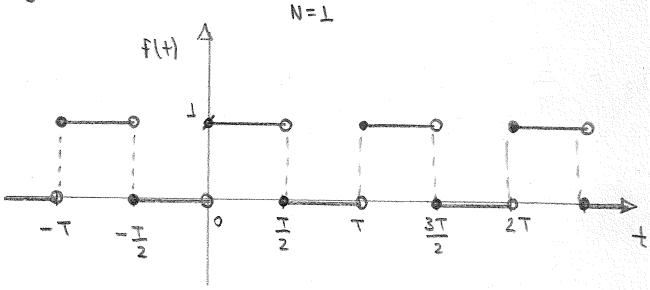
Ⓐ DOMÍNIO CONTÍNUO:

DADO O PRODUTO ESCALAR $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x).g(x)dx$

- $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$
- $a_K = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x).\cos(Kx)dx \qquad K = 1, 2, 3, \dots, N$
- $b_K = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x).\operatorname{sen}(Kx)dx \qquad K = 1, 2, 3, \dots, N$

EXERCÍCIO 3: VAMOS APROXIMAR A FUNÇÃO $f(t)$ POR UMA FUNÇÃO

$$g(x) = a_0 + \sum_{N=1}^{3} (a_K \cos Kx + b_K \operatorname{sen} Kx)$$



A FUNÇÃO $f(t)$ TEM PERÍODO T. VAMOS FAZER UMA MUDANÇA DE VARIÁVEL PARA OBTER $f(t(x))$ COM PERÍODO 2π. ESSA MUDANÇA É FEITA ATRAVÉS DA TRANSFORMAÇÃO $t(x) = \dfrac{T}{2\pi} x$

CALCULANDO OS COEFICIENTES

- $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t(x)).dx \Rightarrow$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \cancelto{1}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)}dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cancelto{0}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)}dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} 1\,dx + \cancelto{0}{\int_{\pi}^{2\pi} 0\,dx}\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[x\Big|_0^{\pi}\right] \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{2}}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t(x)).\cos x\,dx$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cancelto{1}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)}\cos x\,dx + \cancelto{0}{\int_{\pi}^{2\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos x\,dx}\right)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x\,dx \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t(x)).\cos 2x.dx$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cancelto{1}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \cdot \cos 2x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cancelto{0}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \cos 2x\,dx\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x\,dx \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t(x)) \cdot \cos 3x\,dx\right) \Rightarrow$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cancelto{1}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \cdot \cos 3x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cancelto{0}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \cdot \cos 3x\,dx\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 3x\,dx \Rightarrow \boxed{a_3 = 0}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t(x)) \cdot \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cancelto{1}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \operatorname{sen} x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cancelto{0}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \operatorname{sen} x\,dx\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{2}{\pi}}$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t(x)) \cdot \operatorname{sen} 2x\,dx \Rightarrow$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cancelto{1}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \cdot \operatorname{sen} 2x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cancelto{0}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \cdot \operatorname{sen} 2x\,dx\right)$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x\,dx \quad \left| \begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2dx \end{array} \right\rangle \int \operatorname{sen} u \frac{du}{2}$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{b_2 = 0}$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t(x)) \cdot \operatorname{sen} 3x\,dx \Rightarrow$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cancelto{1}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \cdot \operatorname{sen} 3x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cancelto{0}{f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \cdot \operatorname{sen} 3x\,dx\right)$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos 3x}{3}\right]\Bigg|_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{b_3 = \frac{2\pi}{3}}$$

PORTANTO: $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} x + \frac{2\pi}{3}\operatorname{sen} 3x$

(B) CASO DISCRETO:

* MESMA FAMÍLIA DE FUNÇÕES:
* DADO O PRODUTO ESCALAR:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^{2N} f(x_j) \cdot g(x_j)$$

NO QUAL: $x_j = \frac{\pi}{N} j \qquad j = 1, 2, 3 \ldots 2N$

QUANTI// DE PONTOS

- $$a_0 = \frac{\sum_{j=1}^{2N} f(x_j)}{2N}$$

NÚMERO DO HARMÔNICO

- $$a_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{j=1}^{2N} f(x_j) \cdot \cos\left(\frac{k\pi j}{N}\right)\right]$$

- $$b_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{j=1}^{2N} f(x_j) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi j}{N}\right)\right]$$

- POLINÔMIOS ORTOGONAIS:

FÓRMULA:

$$\boxed{P_{J+1}(x) = x P_J(x) - \frac{\langle xP_J, P_J\rangle}{\langle P_J, P_J\rangle} P_J(x) - \frac{\langle xP_J, P_{J-1}\rangle}{\langle P_{J-1}, P_{J-1}\rangle} P_{J-1}(x)}$$

EXEMPLO: Em $[0,1]$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)dx$

- $p_0(x) = 1$
- $p_1(x) = x + a$
  - a → COEFICIENTE DE ORDEM ZERO
  - x → COEFICIENTE DE ORDEM UM

EU QUERO ENCONTRAR $p_1(x)$:

$$P_{0+1}(x) = x p_0(x) - \frac{\langle xp_0, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0(x) - \cancel{\frac{\langle xp_0, p_{0-1}\rangle}{\langle p_{0-1}, p_{0-1}\rangle}} p_{0-1}(x)$$

NÃO EXISTE

$$p_1(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}.1$$

- $\langle x, 1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$
- $\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 dx = [x]\Big|_0^1 = 1$

OU SEJA: $\boxed{p_1(x) = x - \frac{1}{2}}$

SÃO ORTOGONAIS!

$$P_{1+1}(x) = x.p_1(x) - \frac{\langle xp_1, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} p_1(x) - \frac{\langle xp_1, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0(x)$$

$$P_2(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\langle x(x-\frac{1}{2}); (x-\frac{1}{2})\rangle}{\langle (x-\frac{1}{2}); (x-\frac{1}{2})\rangle}.\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{\langle x(x-\frac{1}{2}), 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1$$

- $\langle x^2 - \frac{x}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)dx =$

$$\int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right)dx = \int_0^1 x^3dx - \int_0^1 x^2dx + \frac{1}{4}\int_0^1 x\,dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{6-8+3}{24} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

- $\langle (x-\frac{1}{2}); (x-\frac{1}{2})\rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \rightarrow$

$u = x - \frac{1}{2}$ | $du = dx$ $\rightarrow$ $\int u^2du = \frac{u^3}{3}$

$$\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 - \left(0 - \frac{1}{2}\right)^3\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] = \boxed{\frac{1}{12}}$$

- $\langle x(x - \frac{1}{2}), 1\rangle = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)dx =$

$$\int_0^1 x^2dx - \int_0^1 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{4-3}{12} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

$$P_2(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{12}}{1} 1$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12} =$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} =$$

$$P_2(x) = x^2 - x + \frac{3-1}{12} =$$

$$\boxed{P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}}$$

- MUDANÇA DE VARIÁVEL :

EXEMPLO : OS POLINÔMIOS ORTOGONAIS

- $p_0(x) = 1$
- $p_1(x) = x - \frac{1}{2}$
- $p_2(x) = x^2 + x - \frac{1}{6}$

PODIA PEDIR PARA ENCONTRAR ESSES POLINÔMIOS

PARA O PRODUTO INTERNO $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg\,dx$

VAMOS USAR OS POLINÔMIOS CORRESPONDENTES PARA $\int_{-1}^{1} f(x).g(x)\,dx$

$L = 2x - 1$

$[0, 1] \qquad [-1, 1]$

$L^{-1} = +\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

* $f(x) = ax + b$

$-a + b = 0$

$a + b = 1$

$2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$ E $a = \frac{1}{2}$

ARTIFÍCIO PARA ENCONTRAR

- $p_0 = 1 \rightarrow \tilde{p}_0 = p_0(L^{-1}(x)) = 1 \Rightarrow \boxed{\tilde{p}_0 = 1}$

- $p_1 = x - \frac{1}{2} \rightarrow \tilde{p}_1 = p_1(L^{-1}(x)) \Rightarrow$

$\tilde{p}_1 = p_1\left(\frac{1}{2}(x+1)\right) \Rightarrow$

$\tilde{p}_1 = \left(\frac{1}{2}(x+1)\right) - \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\boxed{\tilde{p}_1 = \frac{1}{2}x}$

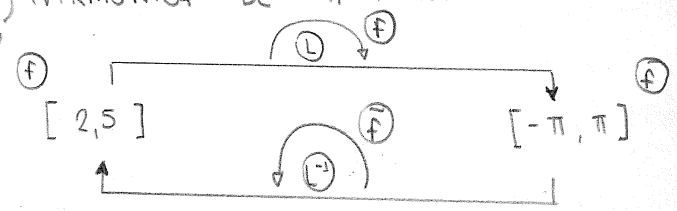
- $p_2 = x^2 + x - \frac{1}{6} \rightarrow \tilde{p}_2 = p_2(L^{-1}(x)) \Rightarrow$

$\tilde{p}_2 = \left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(x+1)\right) - \frac{1}{6} \Rightarrow$

$\boxed{\tilde{p}_2 = \frac{x^2}{4} + x + \frac{7}{12}}$

- MUDANÇA DE VARIÁVEL + ANÁLISE HARMÔNICA

EXEMPLO : SUPONHA $f : [2,5] \rightarrow \mathbb{R}$ DADA POR $f(x) = x - \frac{7}{2}$. REALIZAR A ANÁLISE HARMÔNICA DE $-\pi$ A π.



$y = ax + b \rightarrow -\pi = a2 + b \qquad -\pi = a2 + \cancel{b}$

$\pi = a5 + b \rightarrow -\pi = -a5 - \cancel{b}$

$-2\pi = -3a \quad \boxed{a = \frac{2\pi}{3}}$

$-\pi - 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = b \rightarrow \frac{-3\pi - 4\pi}{3} = \boxed{b = -\frac{7\pi}{3}}$

$y = \frac{2\pi}{3}x - \frac{7\pi}{3} \rightarrow \boxed{y = \frac{2\pi}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)} = L(x)$

$y = ax + b \rightarrow 2 = -a\pi + b$

$5 = a\pi + b \rightarrow \boxed{b = \frac{7}{2}}$

$-a\pi = 2 - \frac{7}{2} \Rightarrow -a\pi = \frac{4-7}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2\pi}}$

$\boxed{y = \frac{3}{2\pi}x + \frac{7}{2}} \rightarrow L^{-1}(x)$

$\boxed{\tilde{f}(x) = f(L^{-1}(x))}$

$\tilde{f}(x) = L^{-1}(x) - \frac{7}{2} \Rightarrow \boxed{\tilde{f}(x) = \frac{3x}{2\pi}}$

ANÁLISE HARMÔNICA :

$$\tilde{g}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$$

ENCONTRANDO OS COEFICIENTES

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{2\pi}x\,dx =$

$a_0 = \frac{3}{4\pi^2} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

- $a_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cdot\cos(Kx)\,dx \Rightarrow$

$$a_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3x}{2\pi}\cdot\cos(Kx)\,dx \Rightarrow$$

$$a_K = \frac{3}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(Kx)\,dx \Rightarrow$$

POR PARTES : $\left\{\begin{array}{l|l} u = x & dv = \cos(Kx) \\ du = dx & v = \frac{\operatorname{sen}(Kx)}{K}\end{array}\right.$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(Kx)\,dx = \left[x\cdot\frac{\operatorname{sen}(Kx)}{K}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(Kx)}{K}\,dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(Kx)\,dx = \left[\frac{x\cdot\operatorname{sen}(Kx)}{K}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\cos(Kx)}{K^2}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(Kx)\,dx = \left[\cancelto{0}{\frac{\pi\cdot\operatorname{sen}(K\pi)}{K}} + \cancelto{0}{\frac{\pi\cdot\operatorname{sen}(-K\pi)}{K}}\right] + \cancelto{0}{\frac{\overset{-1}{\cos(\pi K)} - \overset{+1}{\cos(-\pi K)}}{K^2}}$$

$$\boxed{a_K = 0}$$

- $b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\operatorname{sen}(Kx)\,dx \Rightarrow$

$$a_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3x}{2\pi}\cdot\operatorname{sen}(Kx)\,dx \Rightarrow$$

$$b_K = \frac{3}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\operatorname{sen}(Kx)\,dx$$

POR PARTES : $\left\{\begin{array}{l|l} u = x & dv = \operatorname{sen}(Kx)dx \\ du = dx & v = -\frac{\cos(Kx)}{K}\end{array}\right.$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\operatorname{sen}(Kx)\,dx = \left[-\frac{x\cdot\cos(Kx)}{K}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(Kx)}{K}\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\operatorname{sen}(Kx)\,dx = \left[\frac{-\pi\cdot\cos(K\pi)}{K} + \frac{\pi\cos(-K\pi)}{K}\right] + \cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}(\pi K) - \operatorname{sen}(-\pi K)}{K^2}}$$

$$b_K = \frac{3}{\cancel{2\pi^2}}\,(-\cancel{2\pi})\,\frac{1\cdot\cos(K\pi)}{K}$$

$$\boxed{b_K = \frac{-3\cos(K\pi)}{\pi K}}$$

$$\tilde{g}(x) \approx \cancelto{0}{a_0} + \cancelto{0}{\sum_{K=1}^{\infty} a_K\cos(Kx)} + \sum_{K=1}^{\infty} b_K\cdot\operatorname{sen}(Kx)$$

$$\tilde{g}(x) \approx b_1\operatorname{sen}(x) + b_2\operatorname{sen}(2x)$$

$$\tilde{g}(x) = \frac{-3}{\pi}\overset{-1}{\cos(\pi)}\operatorname{sen}(x) + \frac{-3}{2\pi}\overset{+1}{\cos(2\pi)}\cdot\operatorname{sen}(2x)$$

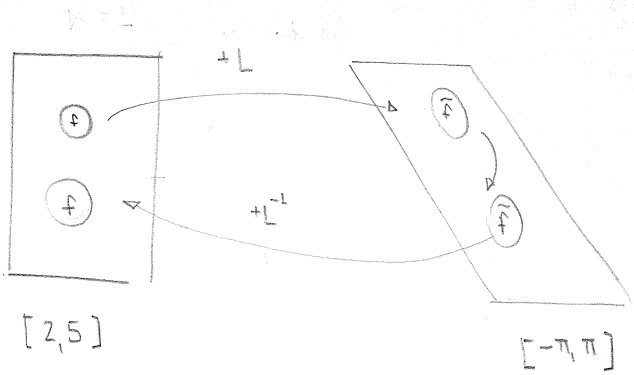
$$\boxed{\tilde{g}(x) = \frac{3}{\pi}\operatorname{sen}(x) - \frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}(2x)}$$

$$\begin{tikzcd} {[-\pi,\pi]} \arrow[r, bend left, "L"] & {[2,5]} \arrow[l, bend left, "L^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\tilde{g}$ $\qquad$ g

$$\boxed{g = \tilde{g}(L(x))} \longrightarrow L(x) = \frac{2\pi}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$$\boxed{g = \frac{3}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)\right) - \frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)\right)}$$



- INTERPOLAÇÃO:

(I) INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE:

O POLINÔMIO QUE PASSARÁ PELOS PONTOS DADOS DO ENUNCIADO SERÁ:

$$\boxed{p(x) = f(x_0).L_0(x) + f(x_1).L_1(x) + \dots + f(x_N).L_N(x)}$$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

EXEMPLO:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-1	1
1	0	-1
2	1	2

$$p(x) = f(x_0)\,L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x) + f(x_2)\,L_2(x)$$

$$p(x) = 1\,L_0(x) - 1\,L_1(x) + 2\,L_2(x)$$

- $$L_0(x) = \frac{(x - x_1).(x - x_2)}{(x_0 - x_1).(x_0 - x_2)} = \frac{(x-0).(x-1)}{(-1-0).(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

- $$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1).(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -x^2 + 1$$

- $$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$p(x) = 1 \cdot \frac{x(x-1)}{2} - 1\,(-1)(x^2 - 1) + \cancel{2}\,\frac{x(x+1)}{\cancel{2}}$$

$$p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + x^2 - 1 + x^2 + x$$

$$\boxed{p(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{x^2}{2} - 1}$$

(II) INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N] = \frac{f[x_1, x_2, \dots x_N] - f[x_0, x_1, \dots x_{N-1}]}{x_N - x_0}$$

$x_0 \quad f(x_0)$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$x_1 \quad f(x_1)$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$x_2 \quad f(x_2)$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$x_3 \quad f(x_3)$

EXEMPLO:

	x_i	$f(x_i)$
0	-1	1
1	0	-1
2	1	2

$$\frac{(-1) - 1}{0 - (-1)} = -2 \qquad \frac{2 - (-1)}{1 - 0} = 3$$

$$\frac{3 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{5}{2}$$

EU QUERO ENCONTRAR $p_f[x_0, x_1, x_2](x)$

$$p_f[x_0, x_1, x_2](x) =$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$1 + (-2)(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)(x) =$$

$$1 - 2x - 2 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x =$$

$$\boxed{\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = p_f[x_0, x_1, x_2]}$$

TEORIA: EXISTE UM PONTO ξ ($\in x$) TAL QUE:

$$f^{(N)}(\xi) - N!\, f[x_0, x_1, \dots, x_N] = 0$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_N] = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}$$

$$f(x) - p_f[x_0, x_1, x_2 \dots, x_N](x) \leq \frac{\hat{M}}{(N+1)!} \left| (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N) \right|$$

$f^{(N+1)}$

INTEGRAÇÃO

I MÉTODO DE TRAPÉZIO

$$\boxed{\int_a^b f \approx (b-a)\,\frac{f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)\ldots+2f(x_{N-1})+f(x_N)}{2N}}$$

$$\boxed{\text{ERRO} \leq \frac{M_f^{(2)}}{12}(b-a)^3\,\frac{1}{N^2}} < \varepsilon$$

II MÉTODO DE SIMPSON:

$$\boxed{\int_a^b f \approx (b-a)\,\frac{f(x_0)+4f(m_1)+2f(x_1)+4f(m_2)+\ldots+2f(x_{N-1})+4f(m_N)+f(x_N)}{6N}}$$

$$\boxed{\text{ERRO} \leq \frac{M_f^{(4)}}{2880}\cdot(b-a)^5\cdot\frac{1}{N^4}} < \varepsilon$$

$$* \quad \frac{(1+b-a)\times 10^N}{2} << \varepsilon$$

III GAUSSIANA:

INTERVALO DADO: $[a, b]$

O QUE EU QUERO: $[-1; 1]$

$$x = \frac{1}{2}\left[(b+a)+t(b-a)\right]$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2}\,dt$$

EXEMPLO: $\int_0^{10} e^{-x}\,dx$ $\quad \begin{cases} x = 5+5t \\ dx = 5dt \end{cases}$

$$\int_0^{10} e^{-x}\,dx = \int_{-1}^{1} e^{-5-5t}\cdot 5dt = 5\underbrace{\int_{-1}^{1} e^{-5-5t}\,dt}$$

$f(x) = e^{-x}$ e $g(t) = e^{-5-5t}$

$$5\boxed{\int_{-1}^{1} g(t).dt} = 5\boxed{\left[A_0\,g(t_0)+A_1\,g(t_1)\right]}$$

$$\begin{cases} A_0 = 1 \rightarrow t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ A_1 = 1 \rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$5\int_{-1}^{1} g(t).dt = 5\left[e^{-5+5\frac{\sqrt{3}}{3}} + e^{-5-5\frac{\sqrt{3}}{3}}\right]$$

$$5\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = 0{,}606102$$

excellentia

USP

CÁLCULO NUMÉRICO

PROF. FABRÍCIO PIO 19.JUN.2016

NOME: _____

POLYNOMIAL INTERPOLATION

• LAGRANGE POLYNOMIAL

$n = 3$ points $\{x_0, x_1, x_2\}$:

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$p(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

• NEWTON POLYNOMIAL

$n = 3$ points $\{x_0, x_1, x_2\}$:

$$p_3 = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

NUMERICAL INTEGRATION

• TRAPEZOIDAL RULE

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b - a)\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$$

$$|E_T| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|$$

$$h = \frac{b - a}{n}$$ n: NUMBER OF TRAPEZOIDS

• n-SIMPSON'S 1/3 RULE

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3} h \left[f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2) \right]$$

$$|E_S| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

derivada à quarto

Método numérico p/ grau 3 é Simpson.

$$h = \frac{b - a}{2n}$$ n: NUMBER OF PARABOLAS

HARMONIC ANALYSIS

• FOR ARBITRARY PERIOD 2L

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + b_k \sin \frac{k\pi t}{L} \right)$$

→ HARMÔNICO

• COEFFICIENTS

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{k\pi t}{L}\,dt \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{k\pi t}{L}\,dt \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

• LEGENDRE POLYNOMIAL

$$\langle p_n, p_m \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x) p_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{IF } m \ne n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{IF } m = n \end{cases}$$

$$p_0 = 1, \; p_1(x) = x, \; p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

• USEFUL RESULTS

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{k\pi t}{L}\,dt = 0 \qquad \int_{-L}^{L} \sin \frac{k\pi t}{L}\,dt = 0$$

$$\int t \cos(\lambda t)\,dt = \frac{\lambda t \sin(\lambda t) + \cos(\lambda t)}{\lambda^2} + c$$

$$\int t \sin(\lambda t)\,dt = \frac{\sin(\lambda t) - \lambda t \cos(\lambda t)}{\lambda^2} + c$$

BOM SABER

• DISCRETE

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} f(x_j)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{2N} f(x_j) \cos\left(k \frac{\pi}{N} j\right) \qquad 1 \le k < N$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{2N} f(x_j) \sin\left(k \frac{\pi}{N} j\right) \qquad 1 \le k < N$$

• AMPLITUDE

$$A_k = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$$

10.

Determinar a forma generalizada da *Regra dos Trapézios.*

11.

Determinar a forma generalizada da *Regra* $1/3$ *de Simpson.*

12.

Determinar a forma generalizada da *Regra* $3/8$ *de Simpson.*

13.

Calcular

$$\int_0^{1.2} e^x \cos x \, dx,$$

pelo método de Simpson, sabendo que:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
e^x	1	1.221	1.492	1.822	2.226	2.718	3.320
$\cos x$	1	0.980	0.921	0.825	0.697	0.540	0.362
$e^x \cos x$	1	1.197	1.374	1.503	1.552	1.468	1.202

14. P3 2003

Calcule o polinômio interpolador na forma de Newton para $f(x) = 2^x$, relativamente aos pontos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. Use o polinômio para aproximar $\sqrt{2}$ e estime o erro.

Erro na interpolação polinomial:

$$\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

15. P3 1990

Use o Método de Simpson para aproximar a integral abaixo com erro menor que 0.1

$$\int_0^2 e^{x^2} \, dx$$

16. REC 2010

Determine o número mínimo de repetições para se aproximar $\int_2^4 \log x \, dx$ pelo método dos n-trapézios com erro menor do que 0.01 e calcule a aproximação.

17. P3 2008

Uma fórmula de integração aberta não faz uso dos valores da função nos extremos do intervalo. Por exemplo, para calcular $\int_0^4 f(x) \, dx$ dividimos $[0; 4]$ em quatro subintervalos de mesmo tamanho e aproximamos a integral de f pela integral do polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola f nos pontos interiores 1, 2 e 3.

a) Determine pelo método de diferenças divididas o polinômio p que interpola f nestes 3 pontos.

b) Integre p no intervalo $[0, 4]$ (pela fórmula de Simpson) de maneira a obter a fórmula de integração. Há diferença caso você integre p exatamente?

c) Use a fórmula obtida para integrar

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

(sim, uma mudança de variável se faz necessária!)

18. P3 2003

Aproxime

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \cos^2(x)} \, dx$$

usando a fórmula dos trapézios com $h = \pi/6$. Determine quantas repetições seriam necessárias para se garantir um erro menor do que 10^{-6}.

Erro na fórmula dos trapézios:

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} \left| f''(\xi) \right|$$

19. P3 2009

Uma fórmula de integração numérica para $\int_0^3 f(x) \, dx$ baseada em interpolação por polinômios de grau 3 nos pontos 0, 1, 2 e 3 é obtida aproximando-se a integral de f pela integral de seu polinômio interpolador p_3. Obtenha esta fórmula e utilize-a para avaliar $\int_1^2 1/x \, dx$. (Sugestão: escreva p_3 na forma de Lagrange e use um método numérico conhecido, exato para polinômios de grau 3, para avaliar as integrais dos polinômios de Lagrange).

20. P3

No cálculo de $\int_a^b f(x) \, dx$ com o Método de 1-trapézio obtemos o valor $4/3$, com o Método de 2-trapézios obtemos o valor $7/6$ e com 4-trapézios $67/60$. Determine que valores se obtém ao se calcular a integral pelos métodos de Simpson e 2-Simpsons.

21. P3

a) Mostre que $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x) \, dx = p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + p\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, para todo polinômio p de grau menor ou igual a 3.

b) use o item a) para calcular $\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 2x) \, dx$

ANOTAÇÕES

• CÁLCULO NUMÉRICO (MAP3121) : P5 GEORGE EMILIANO - Nº: 9052568 25/06/16

① MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (mmQ):

$$\langle g^{(1)}(x), g^{(1)}(x)\rangle \alpha_1 + \langle g^{(1)}(x), g^{(2)}(x)\rangle \alpha_2 = \langle f(x), g^{(1)}(x)\rangle$$

$$\langle g^{(2)}(x), g^{(1)}(x)\rangle \alpha_1 + \langle g^{(2)}(x), g^{(2)}(x)\rangle \alpha_2 = \langle f(x), g^{(2)}(x)\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \langle g^1, g^1\rangle & \langle g^1, g^2\rangle \\ \langle g^2, g^1\rangle & \langle g^2, g^2\rangle \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{\text{MINHA INCOGNITA!}} = \begin{bmatrix} \langle f, g_1\rangle \\ \langle f, g_2\rangle \end{bmatrix}$$

Ⓐ DISCRETO : $\langle f, g\rangle = \sum f \cdot g$

Ⓑ CONTÍNUO : $\langle f, g\rangle = \int_a^b f g \, dx$

② ANÁLISE HARMÔNICA :

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sim} \frac{k\pi x}{L} \right)$$

• k = HARMÔNICO
• L = INTERVALO

$2N$ = Nº DE PONTOS

Ⓐ DISCRETO :

$$\cdot\ a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} f(x_j)$$

$$\cdot\ a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{2N} f(x_j) \cos\left(k \frac{\pi}{N} j\right)$$

$$\cdot\ b_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{2N} f(x_j) \operatorname{sen}\left(k \frac{\pi}{N} j\right)$$

$$x_j = \frac{\pi}{N} j \qquad j = 1, 2, 3 \ldots 2N$$

Ⓑ CONTÍNUO :

$$\cdot\ a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$\cdot\ a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$

$$\cdot\ b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \operatorname{sim}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$

③ POLINÔMINOS ORTOGONAIS

$$p_{p+1} = p_p(x) \cdot x - \frac{\langle x p_p, p_p\rangle}{\langle p_p, p_p\rangle} p_p - \frac{\langle x p_p, p_{p-1}\rangle}{\langle p_{p-1}, p_{p-1}\rangle} p_{p-1}$$

④ MUDANÇA DE VARIÁVEIS:

• $\tilde{p}_0 = p_0(L^{-1}(x))$

• $p_0 = \tilde{p}_0(L(x))$

⑤ POLINÔMIO DE LEGENDRE :

$$\langle P_N, P_M\rangle = \int_{-1}^{1} P_N(x) \cdot P_M(x)\, dx \begin{cases} 0 & , m \neq N \\ \dfrac{2}{2N+1} & , m = N \end{cases}$$

$P_0 = 1$; $P_1 = x$; $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

⑦ INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

$$p(x) = f(x_0) L_0(x_0) + \ldots + f(x_N) L_N(x_N)$$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

⑧ INTERPOLAÇÃO DE NEWTON :

$E(x) = \max |F^{N+1}| (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{N-1}) / (m+1)!$

EX.: $p_f[x_0, x_1, x_2](x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

9 INTEGRAÇÃO

I) TRAPÉZIO : $\int_a^b f = (b-a) \cdot \dfrac{f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)}{2\cancel{6}N}$

$$\text{ERRO} \leq \frac{M_f^{(II)}}{12} \cdot (b-a)^3 \cdot \frac{1}{N^2} < \ddot{3}$$

II) SIMPSON : $\int_a^b f = (b-a) \cdot \dfrac{f(x_0) + 4f(m_1) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{N-1}) + 4f(m_N) + f(x_N)}{6N}$

$$\text{ERRO} \leq \frac{M_f^{(IV)}}{2880} \cdot (b-a)^5 \cdot \frac{1}{N^4} < \ddot{3}$$

NÚMERO DE CASAS : $\dfrac{1 + (b-a) \cdot 10^N}{2} << 10^{\ddot{3}}$

10 EDOS :

EULER : $x_{k+1} = x_k + h\, f(t_k, x_k)$

TAYLOR : $x_{k+1} = x_k \left[1 + h \cdot e^{-t_k} + \dfrac{h^2}{2} \left(e^{-2t_k} - e^{-t_k} \right) \right] \otimes$

$$x_{k+1} = x_k + h\, f(t_k, x_k) + \frac{h^2}{2} \left[f_T(t_k, x_k) + f \cdot f_x \right]$$

RUNGE-KUTTA : $\xi_1 = f(t_k, x_k)$ e $\xi_2 = f(t_k + h,\ x_k + h\xi_1)$

$$x_{k+1} = x_k + h \left[\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 \right]$$