Numérico

⇒ MMQ Contínuo

• Polinômios Ortogonais: → precisamos de polinômios c/ coef principal 1. Quando são ortogonais, resolver o sistema de MMQ é só dividir 2 parcelas

→ $\langle x, y \rangle = \int_a^b x\,y\,dx$

→ método ingênuo: $P_n(x) = x^n + a x^{n-1} + \dots + a_0$ e resolve sistemas $\begin{cases} \langle P_2, P_0 \rangle = 0 \\ \langle P_2, P_1 \rangle = 0 \end{cases}$ etc.

↳ Não usar, mta conta!

→ método engenhoso: intervalo $[a;b]$ $\quad P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x - \left(\frac{a+b}{2}\right)$ → SEMPRE.

Agora, para calcular os próximos: $P_{j+1} - x.P_j = a_{j-1} P_{j-1} + a_j P_j$ onde $\begin{cases} a_{j-1} = \dfrac{-\langle x.P_j ; P_{j-1} \rangle}{\langle P_{j-1}, P_{j-1} \rangle} \\ a_j = \dfrac{-\langle x P_j ; P_j \rangle}{\langle P_j ; P_j \rangle} \end{cases}$

→ exemplo: de $[-1;1]$ $\quad P_0 = 1 \quad P_1 = x$

↳ $P_2 - x.P_1 = a_0 . P_0 + a_1 P_1$

$P_2 - xP_1 = -\frac{1}{3} P_0 + 0\ P_1$

$P_2 = x.P_1 - \frac{1}{3} P_0 = x^2 - 1/3$

$\left\{ a_0 = \dfrac{\langle -x.P_1, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \dfrac{\int_{-1}^{1} -x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1\, dx} = -\frac{1}{3} \qquad a_1 = \dfrac{\langle -x P_1, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = 0 \right.$

↳ $P_3 - xP_2 = a_1 P_1 + a_2 P_2$ (↑ não é o mesmo de antes)

$\left\{ a_1 = \dfrac{\langle x P_2, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} \qquad a_2 = -\dfrac{\langle x P_2, P_2 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} \right.$ e assim em diante.

(Leia isso antes)

↳ Polinômios ortogonais dependem do intervalo, mas podemos fazer de $[-1 a 1]$ e fazer mudança de variáveis: $[a, b]$ em x, $[c, d]$ em y; $f(x)$, $F(x)$

$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c}$. Se $f(x) \underset{[a,b]}{\sim} a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots a_n P_n$

→ os coeficientes são iguais $a_j = b_j$

→ escrever os P_n em função de $x(y)$

exemplo: $f(x) \underset{[-1;1]}{\sim} \frac{1}{2} P_0(x) + 0 . P_1(x) - \frac{15}{16} P_2(x)$ $\quad$ $[-1, 1]$ em x, $[0, 4]$ em y $\quad$ $P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = x^2 - 1/3$ ↳ em $[-1; 1]$

$F(y) \underset{[0;4]}{\sim} \frac{1}{2} P_0(y) + 0 P_1(y) - \frac{15}{16} P_2(y)$ $\qquad \frac{x+1}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow x(y) = \frac{y}{2} - 1$

$F(y) \underset{[0;4]}{\sim} \frac{1}{2} P_0\left(\frac{y}{2} - 1\right) + 0 . P_1\left(\frac{y}{2} - 1\right) - \frac{15}{16} P_2\left(\frac{y}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{15}{16}\left[\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 - \frac{1}{3}\right]$

↳ tendo a base de polinômios ortogonais do intervalo queremos aproximar uma função $f(x)$ entre $[a;b]$. Já Calculamos $P_0, P_1 \cdots P_n$.

agora, $f(x) \underset{[a;b]}{\sim} a_0 . P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$. Resolvendo o MMQ:

$a_0 = \dfrac{\langle P_0(x), f(x) \rangle}{\langle P_0(x), P_0(x) \rangle} \qquad a_n = \dfrac{\langle P_n(x), f(x) \rangle}{\langle P_n(x), P_n(x) \rangle}$

Isso tudo equivale ao método de antes, que fazíamos.

$$\begin{matrix} P_0(x) \to \\ P_1(x) \to \end{matrix} \begin{bmatrix} \langle P_0, P_0 \rangle & \langle P_0, P_1 \rangle \\ \langle P_1, P_0 \rangle & \langle P_1, P_1 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle P_0, f \rangle \\ \langle P_1, f \rangle \end{bmatrix} \qquad a_0 = \frac{\langle P_0, f \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} \quad a_1 = \frac{\langle P_1, f \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle}$$

(colunas: P_0, P_1, f; $\langle P_1, P_0 \rangle$ → 0 (ortogonal))

• Análise harmônica. base $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots \cos(n-1)x, \cos nx, \sin x, \sin 2x \dots \sin(n-1)x\}$

$x_k = k\pi/n \qquad k = 1, \dots 2n$

→ $f(x) \underset{[-L,L]}{\sim} a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k . \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right)$

→ $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \\ a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx \\ b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) . \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx \end{cases}$

se $f(x)$ ímpar $a_k = 0$

se $f(x)$ par $b_k = 0$

Interpolação Polinomial

- Dada uma tabela $\begin{array}{c|ccc} x & x_0 & x_1 & x_n \\ f(x) & f_0 & f_1 & f_n \end{array}$ queremos $p(x_j) = f_j$ → polinômio que dá os resultados da tabela.

Forma de Lagrange

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ f(x) & f_0 & f_1 & \cdots & f_n \\ \hline L_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_n & 0 & 0 & & 1 \end{array}$$

$L_j = \begin{cases} 1 \text{ se } j = k \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases} \Rightarrow L_j = \prod \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}$ ← produtório

$p(x) = f_0 L_0 + f_1 L_1 + f_2 L_2 \cdots f_n L_n$

Aproximação $f(x) = p_0(x) + E(x)$

$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$ $\quad L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots}$

Exemplo

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ f & 3 & 6 & 1 \end{array}$$

$L_0 = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$ $\quad L_1 = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$ $\quad L_2 = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$

$p(x) = 3 \cdot \left(\frac{x^2-5x+6}{2}\right) + 6 \cdot (-x^2+4x-3) + 1 \left(\frac{x^2-3x+2}{2}\right) \Rightarrow p(x) = x^2 + 2$

→ Erro ($E(x)$) $\quad E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

nº núm na tabela → pt desconhecido, vamos usar máx possível

Exemplo. $\sin(x)$

$$\begin{array}{c|ccc} x & \pi/6 & \pi/4 & \pi/3 \\ f(x) & 1/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array}$$

$E_2 = \frac{f'''(c)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

Podemos afirmar: $|E_2(\pi/5)| = \frac{\max_{[\pi/6;\pi/3]} |\cos x|}{6} \left|\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)\right|$

Diferenças divididas (Newton)

def: diferença simples: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, e $(\Delta^n f)(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f)(x)$ (ordem n) dif.

$x_j = x_0 + jh$ $\quad \underbrace{f[x_0, \ldots x_n]}_{\text{dif divididos}} = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}$ $\quad x_j = x_0 + jh \quad 0 \le j \le n$

exemplo

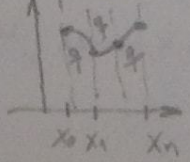
$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 2 & 4 & 6 \\ f(x) & 1 & 9 & 65 & 217 \\ \Delta^0 f(x_0) & 8 & 56 & 152 & \\ \Delta^1 f(x_0) & 48 & 96 & & \\ \Delta^2 f(x_0) & 48 & & & \end{array} \Rightarrow \Delta^3 f(x_0)$$

$P_m(x) = \frac{\Delta^0 f(x_0)}{0!\,h^0} + \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!\,h^1}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1)$

$\cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

$P_3 = \frac{1}{0!\,2^0} + \frac{8}{1!\,2^1}(x-0) + \frac{48}{2!\,2^2}(x-0)(x-2) + \frac{48}{3!\,2^3}(x-0)(x-2)(x-4)$

Integração por partes - Splines Cúbicas



Polinômios $q_j(x) \Rightarrow 0 \le j \le n-1$

$S_j(x) = a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3$

CONDIÇÕES: 1) contínuo $S_j(x_j) = f_j$ $\quad S_j(x_{j+1}) = f_{j+1}$

2) derio. $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$

3) 2ª derio. $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$

⊕ condições de contorno $\begin{cases} \text{Naturais} \begin{cases} S''_0(x_0) = 0 \text{ e } S''_{x_{n-1}}(x_n) = 0 \end{cases} \\ \text{Fixadas} \begin{cases} S'_0(x_0) = f'(x_0) \text{ e } S'_{n-1}(x_n) = f'(x_n) \end{cases} \end{cases}$

⇒ Integração Numérica

- **Regra do Trapézio** $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \underbrace{\frac{f''(c)\,h^3}{12}}_{\text{erro}}$

↳ **Regra dos n trapézios** $h = b-a/n$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots 2f_{n-1} + f_n\right) - \underbrace{\frac{h^2}{12}(b-a)\cdot f''(c)}_{\text{ou } \frac{-(b-a)^3 f''(c)}{12n^2}}$$

Para descobrir n e h:

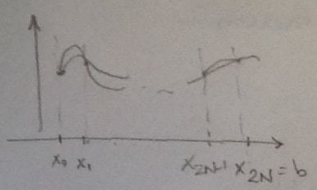
ex: $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$; $\varepsilon = 10^{-3}$ $\quad |\text{Erro}| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{[0;1]} |f'' = -\operatorname{sen} x| < \varepsilon$

$\frac{1}{12n^2} \cdot \operatorname{sen} 1 < 10^{-3} \Rightarrow n \ge 9 \quad h = \frac{b-a}{n} = 1/9$

- **Fórmula de Simpson** $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$ $\quad h = \frac{x_2 - x_0}{2}$ $\quad x_1 = x_0 + h$.

$$|E_S| \le \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c) \rightarrow \text{usar } \max_{[a;b]} |f^{(4)}(x)|$$

↳ **Fórmula de N simpson** + Eficiente q trap. Simpson exato para pol. cúbicos.



$h = \frac{b-a}{2N}$ $\quad n = 2N$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \cdots + 4f_{2N-3} + 2f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N}\right)$$

$$|E_S| \le \frac{Nh^5}{90} \cdot \max_{[a;b]} |f^{(4)}(x)| = \frac{-h^4(b-a)f^{(4)}(c)}{180}$$

- **Romberg** $T(h) = T_{00}$

$T\left(\frac{h}{2}\right) = T_{10} \quad T_{11}$

$T\left(\frac{h}{2^n}\right) = T_{n0} \quad T_{n1} \cdots T_{nn}$

$h_i = b-a/2^i$ primeira coluna: trapézios

$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{4^k - 1}$

erro decai propor. a $\left(\frac{h}{2^{i-k}}\right)^{2k+2}$

$$T(h_i) = \frac{1}{2}T(h_{i-1}) + h_i \cdot \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f(a + (2j-1)h_i)$$

- **Gauss** - polinômio interpolador $P(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j$

! Se $f(x)$ é polinômio de grau $(2n+1)$ então a fórmula de integração de Gauss de grau n é exata para polinômios de grau $\le n$

exemplo $[-1;1]$ $\quad n=1$ $\quad P_0(x)=1$ $\quad P_1(x)=x$ $\quad P_2(x)=x^2-1/3$ $\quad$ raízes $x_0 = -1/\sqrt{3}$ $\quad x_1 = 1/\sqrt{3}$

$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f_0 L_0(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f_1 L_1(x)\,dx$ $\quad \int_{-1}^{1} L_0(x) = \frac{(x - 1/\sqrt{3})}{(-1/\sqrt{3} - 1/\sqrt{3})} = 1$ $\quad \int_{-1}^{1} L_0(x)\,dx = 1$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ será exata para polinômios de grau 3 $(2n+1, n=1)$

$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 0$ $\quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$ $\quad \int_{-1}^{1} x\,dx = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

Se quisermos p/ $[0;1]$ $\quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+0}{1}$ $\quad \frac{dx}{2} = \frac{dy}{1}$ $\quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L(x)\,dx = \frac{1}{1}\int_0^1 l(x)\,dx \Rightarrow$

$y_0 = \frac{x_0 + 1}{2}$ $\quad y_1 = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{2}$ $\quad \int_0^1 l(y)\,dy = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$$

Aprox $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{-\sqrt{3}+3}{6}\right)}{\left(\frac{-\sqrt{3}+3}{6}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)}{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)}$

⇒ Extrapolação de Richardson (não sei se cai...)

$R_0(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2$ queremos $\lim_{h \to 0} R_0(h) = c_0$ $\lambda > 1$ dado ou escolhido.

$R_0\left(\frac{h}{\lambda}\right) = c_0 + c_1 \frac{h}{\lambda} + c_2 \frac{h^2}{\lambda^2} \ldots$

$R_1(h) = \frac{R_0(h) - \lambda R_0(h/\lambda)}{1/\lambda}$

$R_n(h) = \frac{R_{n-1}(h) - \lambda^n R_{n-1}(h/\lambda)}{1 - \lambda^n}$

R_0 aprox c_0 com erro $\propto h$
R_1 aprox com erro $\propto h^2$
R_n " " " $\propto h^{n+1}$

exemplo: $f(x) = e^x$ $x = 1$
queremos $f'(1)$

Definimos $D(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} D(h)$

$D(h) = \frac{e(e^h - 1)}{h}$ Usando $h = 1$, $\lambda = \sqrt{2}$

h	$D(h) = R_0(h)$	$R_1(h) = \frac{R_0(h) - R_0(h/\lambda)\lambda}{1-\lambda}$	$R_2(h) = \frac{R_1(h) - \lambda^2 R_1(h/\lambda)}{1-\lambda^2}$	$R_3(h) =$
1	4,6707	2,2177	2,71946	2,71890
$1/\sqrt{2}$	3,9522	2,4932	2,7373	
$1/2$	3,5268	2,6186		
$1/\sqrt{2}^3$	3,6			

$E(h) = R_1(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

⇒ Equações diferenciais

• Euler $y(x_0 + h) = y(x_0) + h\,y'(x_0) + \frac{h^2 y''(c)}{2!}$ ← erro de ordem 2

$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \\ y_0 = y(x_0) \text{ é dado} \end{cases}$

exemplo: $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 3 \end{cases}$ queremos $y(1)$, $h = 0{,}5$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot x_n y_n$
$y_{n+1} = (1 + 0{,}5 x_n) y_n$
$y_1 = (1 + 0) \cdot 3 = 3$
$y_2 = (1 + 0{,}25) 3 = 3{,}75$

$y = \text{Col}(h) \rightarrow$ [illegible]

• Runge-Kutta   resto ordem h^3

⤳ Taylor ordem 2

$y(x_n + h) = y_n + h\,y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(c)$

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right]$

exemplo $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 3 \end{cases}$ $y(1) = ?$ $y'' = 1 \cdot y + x y' = y + x^2 y$

$y_{n+1} = y_n + h\,x_n y_n + \frac{h^2}{2}(1 + x_n^2) y_n$

ordem 2 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = h f(x_n, y_n) \\ k_2 = h\,f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \end{cases}$

igualando a Taylor
$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 h\,\alpha h = \frac{h^2}{2} \\ w_2 h\,\beta k_1 = \frac{h^2}{2} f(x_n, y_n) \end{cases}$
escolhemos $\alpha = \beta = 1$ $w_2 = w_1 = 1/2$

$\Rightarrow \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \\ k_1 = h f(x_n, y_n) \\ k_2 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases}$

ordem 4 $\begin{cases} y_{n+1} = \frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{3} k_3 + \frac{1}{6} k_4 + y_n \\ k_1 = h f(x_n, y_n) \\ k_2 = h f(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 = h f(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases}$

• Eqs de 2ª ordem $y'' = f(x, y, y')$ $\begin{cases} y' = w \\ w' = f(x, y, w) \end{cases}$

Euler 2 variáveis $\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ w_n \end{bmatrix} + h\,f\left(x_n, \begin{bmatrix} y_n \\ w_n \end{bmatrix}\right)$

exemplo $\begin{cases} y'' = -y \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = w \\ w' = -y \end{cases}$ $y(0) = 1$, $w(0) = 2$

$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ w_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} w_n \\ -y_n \end{bmatrix}$