# NUMÉRICO MAP3121 (P1):

## ① MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

**1° PASSO**: ENCONTRAR UMA FUNÇÃO DE RECORRÊNCIA $\phi(x)$. PARA ENCONTRAR $\phi(x)$ CRIAMOS UMA FUNÇÃO CUJO ZERO SEJA O VALOR DESEJADO, DESSA MANEIRA ISOLAMOS O X E TEMOS O $\phi(x)$.

↳ ISSO DA CERTO, pois $\phi(\bar{x})$ É UMA FUNÇÃO CUJO ZERO É O PRÓPRIO $\bar{x}$: $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$

**EXEMPLO**: $\sqrt{2} = ? \Rightarrow x = \sqrt{2}$ : (1)

$x^2 = 2$ : (2)

$x^2 - 2 = 0 = f(x)$ (3)

ISOLANDO O X (4): $x = \frac{2}{x} \Rightarrow \boxed{\phi(x) = \frac{2}{x}}$

**2° PASSO**: DEFINIR UM INTERVALO QUE CONTENHA $\bar{x}$.

↳ NESSE INTERVALO OS SEGUINTES TÓPICOS DEVEM SER OBEDECIDOS:

(i) $\phi(x)$ SEJA CONTÍNUA;

(ii) $f(x)$ SEJA CONTÍNUA;

(iii) $f(x)$ SEJA ESTRITAMENTE DE/CRESCENTE O QUE GARANTE APENAS UMA RAIZ;

(iv) $f(x)$ TROQUE DE SINAL GARANTINDO A EFICÁCIA DO TEOREMA DE BOLZANO

**3° PASSO**: VERIFICAR A CONVERGÊNCIA DE $\phi(x)$

↳ PARA ISSO:

(i) $\phi(x)$ E $\phi'(x)$ DEVEM SER CONTÍNUAS NO INTERVALO

(ii) $\phi(x)$ É UMA N-CONTRAÇÃO:

(A) $|\phi'(x)| < 1$ (MÁXIMO DO MÓDULO DE $\phi(x)$ DEVE SER MENOR QUE 1) → CALCULE $\phi'(x)$ NOS EXTREMOS E EM PONTOS EM $\phi''(x) = 0$

(ii) VERIFICAR SE $X_{N+1} = \phi(X_N)$ CAI SEMPRE DENTRO DO INTERVALO

(A) CALCULAR MÁXIMO E MÍNIMO DE $\phi(x)$ E OBSERVAR SE CAEM NO INTERVALO.

⇒ SE (i), (ii) E (iii) FOREM CONFIRMADAS → $\phi(x)$ OK!

SE (i); (ii) OU (iii) NÃO FOREM OBEDECIDAS → DESCARTAR $\phi(x)$!

**4° PASSO**: ESCOLHER $X_0$:

↳ SENDO I O INTERVALO ESCOLHIDO: $[a, b]$

ENTÃO: $c = \frac{a+b}{2}$ E CALCULAMOS $\phi(c)$:

⇒ SE $\phi(c) < c \rightarrow X_0 = a$

SE $\phi(c) > c \rightarrow X_0 = b$

SE $\phi(c) = c \rightarrow \bar{x} = c$

**5° PASSO**: EXECUTAR AS ITERAÇÕES

↳ DETERMINANDO O NÚMERO DE PASSOS PARA FAZER DURANTE AS ITERAÇÕES:

$|X_N - \bar{x}| \leq M^N |X_0 - \bar{x}| < \varepsilon \Rightarrow$

- "M" É O MÁXIMO DE $|\phi'(x)|$;
- "$|X_0 - \bar{x}|$" É A PIOR HIPÓTESE, ISTO É, $|X_0 - \bar{x}| = C$;
- "N" É O NÚMERO DE PASSOS;

$\Rightarrow M^N |X_0 - \bar{x}| < \varepsilon \Rightarrow$

$\boxed{M^N \cdot C < \varepsilon}$ OU $\boxed{N \cdot \log M < \log \frac{\varepsilon}{C}}$

↳ OUTROS MÉTODOS DE PARADA:

(i) SE $\frac{M}{1-M} > 1$ → ($\phi(x)$ DECRESCENTE) $|X_m - X_{m-1}| < \varepsilon$ (VALE SE A SEQ. É ALTERNADA)

(ii) SE $\frac{M}{1-M} < 1$ → $\frac{M}{1-M} |X_N - X_{N-1}| < \varepsilon$ (VALE SEMPRE QUE $M < 1$)

(iii) $\phi(x)$ FOR CRESCENTE → $X_{m+1} = \phi(X_m \pm 2\varepsilon)$

PARAMOS QUANDO $X_{m+1} > X_m - 2\varepsilon$ OU $X_{m+1} < X_m + 2\varepsilon$

## ② MÉTODO DE NEWTON

1° PASSO: DEFINIR $f(x)$

2° PASSO: $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

3° PASSO: DEFINIR O INTERVALO

(i) VERIFICAR O TEOREMA DE BOLZANO;

(ii) VERIFICAR SE EXISTE APENAS UMA RAIZ (ISTO É ESTRITAMENTE CRESCENTE OU DECRESCENTE)

(iii) VERIFICAR SE $f(x)$ NÃO MUDA A CONCAVIDADE

4° PASSO: ESCOLHER $x_0$ NO INTERVALO $[a,b]$

(i) ANALISAR $f'(x)$ E $f''(x)$

(ii) SE $f'(x)$ E $f''(x)$ TIVEREM O MESMO SINAL: $x_0 = b$

(iii) SE $f'(x)$ E $f''(x)$ TIVEREM SINAIS CONTRÁRIOS: $x_0 = a$

5° PASSO: CASO O ENUNCIADO PEÇA A PRECISÃO PRÉ-FIXADA

| $x_m$ | $f(x_m - p)$ | $f(x_m + p)$ |
|---|---|---|
| | | |

VAMOS OBSERVAR A TROCA DE SINAL

## ③ MÉTODO DA BISSEÇÃO:

1° PASSO: DEFINIR $f(x)$

2° PASSO: DEFINIR INTERVALO. $I = [a,b]$

3° PASSO: DEFINIR NÚMERO DE PASSOS

$$\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon$$

4° PASSO: ITERAÇÕES:

→ $c = \dfrac{a+b}{2}$

→ $f(a) \cdot f(c)$ → $< 0$: ENTÃO $b = c$

→ $> 0$: $f(c) \cdot f(b)$ → $< 0$: ENTÃO $a = c$

→ $> 0$: $c = \bar{x}$

## ④ MÉTODO DAS SECANTES:

1° PASSO: DEFINIR $f(x)$

2° PASSO: $\phi(x,y) = x - \dfrac{f(x)(x-y)}{f(x) - f(y)} = z$

$x$: ANTECESSOR ($x_{k-1}$); $y$: ($x_k$); $z$: SUCESSOR ($x_{k+1}$)

3° PASSO: $\phi(z,x) = z - \dfrac{f(z)(z-x)}{f(z) - f(x)} = w$

$z$: ($x_{k+1}$); $x$: ANTECESSOR ($x_k$); $w$: SUCESSOR ($x_k + 2$)

4° PASSO: REALIZAR N ITERAÇÕES ATÉ QUE A DIFERENÇA ENTRE UM NÚMERO E O SEU SUCESSOR SEJA MENOR QUE O ERRO.

## ⑤ SISTEMAS LINEARES:

- Ⓐ COM PIVOTAMENTO
- Ⓑ SEM PIVOTAMENTO

Ⓐ

1° PASSO: TEMOS A MATRIZ A E A MATRIZ b. VAMOS ENCONTRAR ($Ax = b$) A INCÓGNITA x. PARA ISSO TEMOS QUE ARRUMAR A MATRIZ A PARA QUE OS MAIORES NÚMEROS EM MÓDULO DA 1ª COLUNA SEJAM PIVÔS.

2° PASSO: ANOTAR A TROCA DE LINHA, ESCALONAR E ANOTAR O NÚMERO MULTIPLICADO PELA PRIMEIRA LINHA.

3° PASSO: REPETIR O MESMO PROCEDIMENTO PARA A 2ª LINHA.

4° PASSO: ENCONTRAR A MATRIZ X.

~ ENCONTRANDO O REFINAMENTO ~

5° PASSO: ENCONTRAR O $r^{(0)}$ DADO POR: $b - Ax$

6° PASSO: REALIZAR AS TROCAS DE LINHAS NO $r^{(0)}$

7° PASSO: MULTIPLICAR PELOS "m"

8° PASSO: IGUALAR A MATRIZ ESCALONADA E ENCONTRAR A MATRIZ C

9° PASSO: $x^{(1)} = c^{(0)} + x^{(0)}$

⑧ NESTE CASO, NÃO PRECISAMOS DOS PIVÔS.

---

⑥ JACOBI:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right] \\ \tilde{x}_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right] \\ \tilde{x}_3 = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right] \end{cases} \quad \tilde{x} = \phi_j(x)$$

ANALOGAMENTE PARA y:

$$\hookrightarrow \text{ASSIM} \begin{cases} |\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1| \leq \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} \, d(x,y) \quad (\lambda_1) \\ |\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2| \leq \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} \, d(x,y) \quad (\lambda_2) \\ |\tilde{x}_3 - \tilde{y}_3| \leq \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} \, d(x,y) \quad (\lambda_3) \end{cases}$$

↳ CRITÉRIO DAS LINHAS: TODOS OS $\lambda_s$ PRECISAM SER MENOR QUE 1., $\phi_j$ CONVERGE

---

⑦ GAUSS-SEIDEL:

$$\hookrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right] \\ \tilde{x}_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}\tilde{x}_1 - a_{23}x_3\right] \\ \tilde{x}_3 = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}\tilde{x}_1 - a_{32}\tilde{x}_2\right] \end{cases} \quad \tilde{x} = \phi_G(x)$$

ANALOGAMENTE PARA y:

$$\hookrightarrow \text{ASSIM} \begin{cases} |\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1| \leq \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} \, d(x,y) \quad (\beta_1) \\ |\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2| \leq \frac{\beta_1|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} \, d(x,y) \quad (\beta_2) \\ |\tilde{x}_3 - \tilde{y}_3| \leq \frac{\beta_1|a_{31}| + \beta_2|a_{32}|}{|a_{33}|} \, d(x,y) \quad (\beta_3) \end{cases}$$

↳ CRITÉRIO DE SASSENFELD: TODOS OS $\beta_s$ PRECISAM SER MENOR QUE 1

⑧ DESENVOLVIMENTO DE ⑥ e ⑦:

Ⓐ $$dist\left(\phi_j^{\,k}(x), \tilde{x}\right) \leq (\max \lambda)^k \cdot \underbrace{dist(x, \tilde{x})}_{\text{CONDIÇÃO INICIAL}}$$

$$dist(x, \tilde{x}) \leq \frac{d(x, \tilde{x})}{1 - \lambda_{max}}$$

Ⓑ $$dist\left(\phi_G^{\,k}(x), \tilde{x}\right) \leq (\max \beta)^k \cdot \underbrace{dist(x, \tilde{x})}_{\text{CONDIÇÃO INICIAL}}$$

$$dist(x, \tilde{x}) \leq \frac{d(x, \tilde{x})}{1 - \beta_{max}}$$

---

$$(\max \alpha)^k \cdot \frac{d(x, \tilde{x})}{1 - \alpha_{max}} < \text{PRECISÃO}$$

---

⑨ MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS:

EXEMPLO:

- $N = 3$
- $K = 2$
- $b = (3,4,5)$
- $v^{(1)} = (1,1,1)$
- $v^{(2)} = (-1,2,3)$
- IE GERADO POR $\{v^{(1)}, v^{(2)}\}$

PROBLEMA: ACHE $c = a_1 v^{(1)} + a_2 v^{(2)}$ MAIS PRÓXIMO DE $b$ COM O PRODUTO INTERNO

$$\langle U,V \rangle = U_1 V_1 + 2U_2 V_2 + U_3 V_3$$

MONTAR O SISTEMA:

$$\begin{cases} \langle v^{(1)}, v^{(1)} \rangle a_1 + \langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle a_2 = \langle v^{(1)}, b \rangle \\ \langle v^{(2)}, v^{(1)} \rangle a_1 + \langle v^{(2)}, v^{(2)} \rangle a_2 = \langle v^{(2)}, b \rangle \end{cases}$$

PARA O ERRO SER MÍNIMO, DEVEMOS ACHAR ENTÃO A PROJEÇÃO PTOGONAL DE $f$ NO SUBESPAÇO DE $X \in L$ (NO CASO DE UMA RETA pois $ax + b.1$) ENCONTRANDO ASSIM OS COEFICIENTES $a$ e $b$

$$\begin{matrix} & x \downarrow & 1 \downarrow & & f \downarrow \\ x \rightarrow & \langle x,x \rangle & \langle 1,x \rangle & \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = & \langle f,x \rangle \\ 1 \rightarrow & \langle x,1 \rangle & \langle 1,1 \rangle & & \langle f,1 \rangle \end{matrix}$$

$$f(x) \cong ax + b$$

NO CASO DE UMA PARÁBOLA: $(ax^2 + bx + c)$

$$\begin{matrix} & x^2 \downarrow & x \downarrow & 1 \downarrow & & f \downarrow \\ x^2 \rightarrow & \langle x^2,x^2 \rangle & \langle x^2,x \rangle & \langle x^2,1 \rangle & \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = & \langle x^2,f \rangle \\ x \rightarrow & \langle x,x^2 \rangle & \langle x,x \rangle & \langle x,1 \rangle & & \langle x,f \rangle \\ 1 \rightarrow & \langle 1,x^2 \rangle & \langle 1,x \rangle & \langle 1,1 \rangle & & \langle 1,f \rangle \end{matrix}$$

---

(10) SISTEMAS SOBRE DETERMINADOS:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 3y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} f \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \end{matrix} \sim x \begin{matrix} U \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix} + y \begin{matrix} V \\ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & U \downarrow & V \downarrow & & f \downarrow \\ U \rightarrow & \langle U,U \rangle & \langle V,U \rangle & \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = & \langle f,U \rangle \\ V \rightarrow & \langle U,V \rangle & \langle V,V \rangle & & \langle f,V \rangle \end{matrix}$$

---

(11) MÉTODO DE RELAXAÇÃO

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \omega \left[ \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3) - x_1 \right]$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \omega \left[ \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} \tilde{x}_1 - a_{23} x_3) - x_2 \right]$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 + \omega \left[ \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} \tilde{x}_1 - a_{32} \tilde{x}_2) - x_3 \right]$$

---

(12) DECOMPOSIÇÃO L.U.

$A = L.U$
- $U$ → MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR
- $L$ → MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

→ $Ux = c$

→ $Ly = d$

DESENVOLVENDO:

$Ax = b$:

$L.Ux = b \rightarrow \boxed{y = Ux}$

$Ly = b$
- → INCOGNITA RESOLVIDA

$y = Ux$
- → INCOGNITA RESOLVIDA

COMO DECOMPOR A EM L.U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (A)$$