R$ 2,00

data • •

① ① ① ① ⑤ ① ⑥

Cálculo numérico - Sistemas lineares - Lista resolvida

Luísa Barakat

① $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot -(4/-1) \cdot -(2/-1) \cdot -(0/-1)$ ↓ ↓ ↓

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 11 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot -(2/1) \cdot -(0/1) \rightarrow$ ↓ ↓

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 11 & 1 \\ 2 & 2 & -19 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot -(1/-19)$ ↓

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 11 & 1 \\ 2 & 2 & -19 & -1 \\ 0 & 0 & -1/19 & -1/19 \end{bmatrix}$

$\therefore \det A = -1 \cdot 1 \cdot -19 \cdot \frac{-1}{19}$

$\det A = -1$

Colunas de A^{-1}: $A \cdot C_{A^{-1}j} = C_{Ij}$

- $C_1 : C_{I_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$C_1, l_4 = \frac{0}{(-1/19)} = 0$

$C_1, l_3 = \frac{0 - 0 \cdot (-1)}{-19} = 0$

$C_1, l_2 = \frac{0 - 0 \cdot (1) - 0 \cdot (11)}{1} = 0$

$C_1, l_1 = \frac{1 - 0 \cdot (0) - 0 (2) - 0 \cdot (0)}{-1} = -1$

- $C_2 : C_{I_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$C_2, l_4 = 0$ (idem C_1, l_4)

$C_2, l_3 = 0$ (idem C_1, l_3)

$C_2, l_2 = \frac{1 - 0 \cdot (1) - 0 \cdot (11)}{1} = 1$

$C_2, l_1 = \frac{0 - 0(0) - 0(2) - 1(0)}{-1} = 0$

- $C_3 : C_{I_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$C_3, l_4 = 0$ (idem C_2, l_4)

$C_3, l_3 = \frac{1 - 0 \cdot (-1)}{-19} = \frac{-1}{19}$

$C_3, l_2 = \frac{0 - 0 \cdot (1) + 1/19 (11)}{1} = \frac{11}{19}$

$C_3, l_1 = \frac{0 - 0 \cdot (0) + 1/19 \cdot (2) - 11/19 (0)}{-1} = \frac{-2}{19}$

Jandaia

data • •

• C_4 : $C_{3,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$C_{4,4} = \frac{1}{-1/19} = -19$

$C_{4,3} = \frac{0 - (-19)\cdot(-1)}{19} = 1$

$C_{4,2} = \frac{0 + 19\cdot(1) - 1\cdot(10)}{1} = 8$

$C_{4,1} = \frac{0 - (-19)(0) - 1\cdot(2) - 8\cdot(0)}{-1} = 2$

$\therefore \tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2/19 & 2 \\ 0 & 1 & 11/19 & 8 \\ 0 & 0 & -1/19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0,1 & 2 \\ 0 & 1 & 0,58 & 8 \\ 0 & 0 & -0,053 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$

② a) $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 3 \\ \textcircled{4} & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} \textcircled{4} & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot(3/4)\cdot(1/4)$ $\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0,5 & 2,5 & 5 & 2 \\ 0,25 & \textcircled{-4,5} & -2,3 & -4,5 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{matrix} 2 \\ -2,3 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0,25 & \textcircled{-4,5} & -2,3 & -4,5 \\ 0,5 & 2 & 5,5 & 2 \end{bmatrix} \cdot(2/-4,5) \Rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0,25 & -4,5 & -2,3 & -4,5 \\ 0,5 & -0,44 & 4,5 & 0 \end{bmatrix}$

- $x_3 = \frac{0}{4,5} = 0$
- $x_2 = \frac{-4,5 - (-2,3)x_3}{-4,5} = 1$
- $x_1 = \frac{2 - 1\cdot x_3 - (-2)\cdot x_2}{4} = 1$

$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{x}\ (HP)$

b) $x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)}$

$r = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \vec{0}$

$\therefore x_1 = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jandaia

data • •

S T Q Q S S D

c) $\beta_1 = \frac{a_{12} + a_{13}}{a_{11}} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} > 1$ ∴ não satisfaz sassenfeld!

$\beta_2 = \frac{a_{21}\beta_1 + a_{23}}{a_{22}} = \frac{4 \cdot 7/2 + 1}{2} = \frac{15}{2} > 1$

$\beta_3 = \frac{a_{31}\beta_1 + a_{32}\beta_2}{a_{33}} = \frac{5 \cdot 15/2 + 1 \cdot 7/2}{2} = \frac{82}{4} = \frac{41}{2} = M > 1$

Trocando a posição das equações no sistema:

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}$$

$\lambda_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

$\lambda_2 = \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$ ∴ $L = \lambda_{max} = \frac{3}{4} < 1$

$\lambda_3 = \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{1+2}{6} = \frac{1}{2}$ Convergência assegurada pelo critério das linhas.

d) $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\varepsilon = 0,01$

$L = 3/4$

$n = ?$

$|\bar{x}_1|, |\bar{x}_2|, |\bar{x}_3| \leq 2$

$\|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty \leq L^n \|x^{(0)} - \bar{x}\|_\infty < \varepsilon$

$\|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{L^n}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty < \varepsilon$

$(3/4)^n \cdot 2 < 10^{-2}$ ∴ $n \geq 19$

Do pior cenário

$n \log(3/4) < \log(10^{-2}/2)$

$n > \log(10^{-2}/2) / \log(3/4) = 18,4$

e) $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}$$

$x_1^{(k+1)} = \frac{b_{11} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}}{a_{11}}$

$\Rightarrow x_2^{(k+1)} = \frac{b_{21} - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}}{a_{22}}$

$x_3^{(k+1)} = \frac{b_{31} - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}}{a_{33}}$

x_1	x_2	x_3	k
0	0	0	0
0,5	0,9	0,183	1
0,9	0,91	0,048	2

③ $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,14 \\ 0,13 \\ 0,068 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jandaia

data • •

① ① ⑨ ⑨ ① ① ⑨

2) $r^{(0)} = b - A x^{(0)} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4&2&3\\4&3&1\\2&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,14\\0,13\\0,068\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1,024\\1,018\\0,998\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0,024\\-0,018\\0,002\end{bmatrix}$

(2N:4)

2) $r^{(0)}$ · $\begin{matrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0,024\\-0,018\\0,002\end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0,024\\0,002\\-0,018\end{bmatrix}$ · -(2/4) · -(4/4) ↵ ↵ $\Rightarrow \begin{bmatrix}-0,024\\-0,014\\0,006\end{bmatrix}$ · -(1/4) ↵ $\Rightarrow \begin{bmatrix}-0,024\\0,014\\0,005\end{bmatrix} = \tilde{r}$

c) $\begin{bmatrix}4&2&3&-0,024\\&4&-0,5&0,014\\&&-1,9&0,0025\end{bmatrix}$ $c_3 = 0,0025/-1,9 = -0,0013$

$c_2 = \frac{0,014 - c_3(-0,5)}{4} = 0,0033$ $\Rightarrow c^{(0)} = \begin{bmatrix}-0,0079\\0,0033\\-0,0013\end{bmatrix}$

$c_1 = \frac{-0,024 - c_3(3) - c_2(2)}{4} = -0,0079$

$x_1 = c^{(0)} + x^{(0)} = \begin{bmatrix}-0,0079\\0,0033\\-0,0013\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0,14\\0,13\\0,068\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,13\\0,13\\0,067\end{bmatrix}$

④ a) $\begin{matrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2&1&2\\1&-5&-2&-4\\2&1&6&3\end{bmatrix}$ · -(1/4) · -(2/4) ↵ ↵ $\Rightarrow \begin{matrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2&1&2\\0,25&-4,5&-2,3&-4,5\\0,5&2&5,5&2\end{bmatrix}$ · -(2/4,5) ↵ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2&1&2\\0,25&-4,5&-2,3&-4,5\\0,5&0,44&4,5&0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $x_3 = 0/4,5 = 0$

$x_2 = \frac{-4,5 - (-2,3)\cdot 0}{-4,5} = 1$ $\Rightarrow x = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$x_1 = \frac{2 - 1\cdot 0 - (-2)\cdot 1}{4} = 1$

b) $A \cdot C_{1,A^{-1}} = C_{1,I}$

$\begin{matrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&6&1\\4&-2&1&0\\1&-5&-2&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2&1&0\\1&-5&-2&0\\2&1&6&1\end{bmatrix}$ · -(1/4) · -(2/4) ↵ ↵ $\Rightarrow \begin{matrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2&1&0\\0,25&-4,5&-2,3&0\\0,5&2&5,5&1\end{bmatrix}$ · -(2/4,5) ↵

$\begin{matrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2&1&0\\0,25&-4,5&-2,3&0\\0,5&0,44&4,5&1\end{bmatrix}$ $l_3 = 1/4,5 = 0,22$

$\Rightarrow l_2 = \frac{0 - (-2,3)\cdot l_3}{-4,5} = -0,11$

$l_1 = \frac{0 - 1\cdot l_3 - (-2)\cdot l_2}{4} = -0,11$

Jandaia

data • •

S T Q Q S S D

• $x_1 = x^{(0)} + c^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,98 \\ 0,16 \\ -0,46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,98 \\ -0,84 \\ 1,5 \end{bmatrix}$

⑦

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0,33 & 1 \\ 0,5 & 0,33 & 0,25 & 1 \\ 0,33 & 0,25 & 0,2 & 1 \end{array}\right] \cdot -(0,5/1) \cdot -0,33/1 \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0,33 & 1 \\ 0,5 & 0,08 & 0,08 & 0,5 \\ 0,33 & 0,08 & 0,04 & 0,67 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0,33 & 1 \\ 0,33 & 0,08 & 0,04 & 0,67 \\ 0,5 & 0,08 & 0,08 & 0,5 \end{array}\right] \cdot -(0,08/0,08) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0,33 & 1 \\ 0,33 & 0,08 & 0,04 & 0,67 \\ 0,5 & 1 & -0,01 & -0,17 \end{array}\right]$$

$x_3 = 17$

$x_2 = \frac{0,67 - 0,04 \cdot 17}{0,08} = -10$

$x_1 = 1 \cdot 0,33 \cdot 17 + 5 = 0,4$

⑧ • $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 41,4 \\ -224 \\ 217 \end{bmatrix}$; 3a.s.

• $r = b - A x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,33 \\ 0,5 & 0,33 & 0,25 \\ 0,33 & 0,25 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41,4 \\ -224 \\ 217 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,01 \\ 1,03 \\ 1,062 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,01 \\ -0,03 \\ -0,062 \end{bmatrix}$

(prueba doble)

• $\tilde{r} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} -0,01 \\ -0,03 \\ -0,062 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} -0,01 \\ -0,062 \\ -0,03 \end{bmatrix} \cdot -0,33 \cdot -0,5 \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,0587 \\ -0,026 \end{bmatrix} \cdot -0,941 \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,0587 \\ -0,0802 \end{bmatrix} = \tilde{r}^{(0)}$

• $c^{(0)} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0,33 & -0,01 \\ 0 & 0,085 & 0,091 & 0,0587 \\ 0 & 0 & -0,0006 & 0,0807 \end{array}\right]$ $c_3 = 134$; $c_2 = -142$; $c_1 = 26,8$

3a.s.

• $x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)} = \begin{bmatrix} 68,2 \\ -366 \\ 351 \end{bmatrix}$

• $r = b - A x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,33 \\ 0,5 & 0,33 & 0,25 \\ 933 & 0,25 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 68,2 \\ -366 \\ 351 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9 \\ 1,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,1 \\ -92 \end{bmatrix}$

• $\tilde{r} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ -0,2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix} \cdot (-0,33) \cdot -0,5 \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -92 \\ 6,1 \end{bmatrix} \cdot -0,941 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 0,288 \end{bmatrix} = \tilde{r}^{(1)}$

• $c^{(1)} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0,33 & 0 \\ 0 & 0,085 & 0,091 & -0,2 \\ 0 & 0 & -0,0006 & 0,288 \end{array}\right]$ $c_3 = -480$; $c_2 = 512$; $c_1 = -238$

Jandaia

data • •

$x^{(2)} = x^{(1)} + c^{(1)} = \begin{bmatrix} -1,70 \\ 1,46 \\ -1,25 \end{bmatrix}$

(9) Solução do exercício 7 no HP: $\begin{bmatrix} 33,333.. \\ -180,952380952 \\ 176,190476191 \end{bmatrix}$

Substituindo por 1/3: $\begin{bmatrix} 3 \\ -24 \\ 30 \end{bmatrix}$

(10) Exercício de programação.

(11) 2 a).

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 4,2 & -2 & 6 & 13 \\ 0,5 & 2,2 & 1,1 & 0,77 \\ 3,1 & -1,3 & 1,2 & 5,5 \end{array}\right) \cdot(-0,12) \cdot(-0,74) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4,2 & -2 & 6 & 13 \\ 0,12 & 2,4 & 0,38 & -0,83 \\ 0,74 & 0,2 & -3,2 & -4,1 \end{array}\right) \cdot -0,083 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 4,2 & -2 & 6 & -0,08 \\ 0,12 & 2,4 & 0,38 & 0,83 \\ 0,74 & 0,083 & -3,2 & -4 \end{array}\right) \quad x_3 = 1,3 \Rightarrow x_2 = -0,54 \quad x_1 = 1$$

(12) a) $r = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 5,5 \\ 0,77 \\ 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,1 & -1,3 & 1,2 \\ 0,5 & 2,2 & 1,1 \\ 4,2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,54 \\ 1,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,5 \\ 0,77 \\ 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5,362 \\ 0,742 \\ 13,08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,138 \\ 0,028 \\ -0,08 \end{bmatrix}$

(2D-4)

b) $\cdot r: \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0,138 \\ 0,028 \\ -0,08 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} -0,08 \\ 0,028 \\ 0,138 \end{bmatrix} \cdot -0,12 \cdot -0,74 \Rightarrow \begin{bmatrix} -0,08 \\ 0,038 \\ 0,2 \end{bmatrix} \cdot -0,083 \Rightarrow \begin{bmatrix} -0,08 \\ 0,038 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \tilde{r}$

$\cdot C: \left[\begin{array}{ccc|c} 4,2 & -2 & 6 & -0,08 \\ 0 & 2,4 & 0,38 & 0,038 \\ 0 & 0 & -3,2 & 0,2 \end{array}\right]$

Para utilizar o método de Gauss-Seidel a matriz deve convergir pelo critério de Sassenfeld ou 2x2.

$\beta_1 = \frac{6+2}{4,2} = \frac{8}{4,2}$ já não satisfaz sassenfeld, porém: $M = \left|\frac{-2.0}{4,2.2,4}\right| = 0 < 1$ satisfaz 2x2.

a) $x^0 = (0,0,0)$ $\quad \cdot x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k}{a_{11}}$

Jandaia

data • •

(14) $p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $x^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,93 \\ 1,1 \\ 1,1 \\ 1,9 \end{bmatrix}$ 2c. A:

• $r = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1,5 & 1,5 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,93 \\ 1,1 \\ 1,1 \\ 1,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,07 \\ 1,055 \\ 1,01 \\ -2,83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,07 \\ -0,055 \\ -0,01 \\ -0,83 \end{bmatrix}$

• $\tilde{r}$: $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,07 \\ -0,055 \\ -0,1 \\ 5,8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,07 \\ -0,055 \\ 5,8 \end{bmatrix}$: -0,33 · -0,5 ↓ ↓ $\Rightarrow \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,067 \\ -0,05 \\ 5,8 \end{bmatrix}$ · -0,87 · -0,57 ↓ ↓ ⇒

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,067 \\ 0,008 \\ 5,8 \end{bmatrix}$ · -0,81 ↓ $\Rightarrow \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,067 \\ 0,008 \\ 5,8 \end{bmatrix} = \tilde{r}^{(0)}$

• C: $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & -0,01 \\ 0 & 2,3 & 0,67 & 2,3 & -0,067 \\ 0 & 0 & -2,1 & -2 & 0,008 \\ 0 & 0 & 0 & -1,4 & 5,8 \end{array}\right]$ → $c_4 = -4,1$

→ $c_3 = (0,008 - (2 \cdot 4,1))/-2,1 = -3,9$

→ $c_2 = (-0,067 - \underbrace{(2,3 \cdot 4,1)}_{9,4} + \underbrace{(0,67 \cdot 3,9)}_{2,6})/2,3 = 5,2$

→ $c_1 = (-0,01 + (2 \cdot 4,1) + 3,9 + 5,2)/3 = 5,7$

• $x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)} = \begin{bmatrix} 4,8 \\ 6,3 \\ -2,8 \\ -2,2 \end{bmatrix}$

Jandaia

data • •

(14) $p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $x^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,93 \\ 1,1 \\ 1,1 \\ 1,9 \end{bmatrix}$ 2c. A:

• $r = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1,5 & 1,5 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,93 \\ 1,1 \\ 1,1 \\ 1,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,07 \\ 1,055 \\ 1,01 \\ -2,83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,07 \\ -0,055 \\ -0,01 \\ -0,83 \end{bmatrix}$

• $\tilde{r}$: $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,07 \\ -0,055 \\ -0,1 \\ 5,8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,07 \\ -0,055 \\ 5,8 \end{bmatrix}$: -0,33 · -0,5 ↓ ↓ $\Rightarrow \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,067 \\ -0,05 \\ 5,8 \end{bmatrix}$ · -0,87 · -0,57 ↓ ↓ ⇒

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,067 \\ 0,008 \\ 5,8 \end{bmatrix}$ · -0,81 ↓ $\Rightarrow \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,067 \\ 0,008 \\ 5,8 \end{bmatrix} = \tilde{r}^{(0)}$

• C: $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & -0,01 \\ 0 & 2,3 & 0,67 & 2,3 & -0,067 \\ 0 & 0 & -2,1 & -2 & 0,008 \\ 0 & 0 & 0 & -1,4 & 5,8 \end{array}\right]$ → $c_4 = -4,1$

→ $c_3 = (0,008 - (2 \cdot 4,1))/-2,1 = -3,9$

→ $c_2 = (-0,067 - \underbrace{(2,3 \cdot 4,1)}_{9,4} + \underbrace{(0,67 \cdot 3,9)}_{2,6})/2,3 = 5,2$

→ $c_1 = (-0,01 + (2 \cdot 4,1) + 3,9 + 5,2)/3 = 5,7$

• $x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)} = \begin{bmatrix} 4,8 \\ 6,3 \\ -2,8 \\ -2,2 \end{bmatrix}$

Jandaia

data • •

S T Q Q S S D

• $x_2^{(k+1)} = b_{21} - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}$

• $x_3^{(k+1)} = \frac{b_{31} - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}}{a_{33}}$

k	x_1	x_2	x_3	
0	0	0	0	2 c.s.
1	-0,019	0,016	-0,063	

$\therefore x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,98 \\ -0,52 \\ 1,2 \end{bmatrix}$ ✓

(13) $l = 1m$

$T_0 = 0°$ T_1 T_2 T_3 T_4 $T_5 = 128°$

$\rightarrow T_1 = \frac{T_0 + T_2}{2}$ $\rightarrow T_3 = \frac{T_2 + T_4}{2}$

$\rightarrow T_2 = \frac{T_1 + T_3}{2}$ $\rightarrow T_4 = \frac{T_3 + T_5}{2}$

a) $\begin{cases} 2T_1 - T_2 = 0 \\ 2T_2 - T_1 - T_3 = 0 \\ 2T_3 - T_2 - T_4 = 0 \\ 2T_4 - T_3 = 128 \end{cases} = \begin{cases} 2T_1 - T_2 = 0 \\ -T_1 + 2T_2 - T_3 = 0 \\ -T_2 + 2T_3 - T_4 = 0 \\ -T_3 + 2T_4 = 128 \end{cases}$

b) • $T_1^{(k+1)} = \frac{b_{11} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4}{a_{11}} = \frac{-a_{12}T_2^{(k)}}{a_{11}}$

• $T_2^{(k+1)} = \frac{b_{22} - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4}{a_{22}} = \frac{-a_{21}T_1^{(k+1)} - a_{23}T_3^{(k)}}{a_{22}}$

• $T_3^{(k+1)} = \frac{b_{33} - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{34}x_4}{a_{33}} = \frac{-a_{32}\cdot T_2^{(k+1)} - a_{34}T_4^{(k)}}{a_{33}}$

• $T_4^{(k+1)} = \frac{b_{44} - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3}{a_{44}} = \frac{b_{44} - a_{43}T_3^{(k+1)}}{a_{44}}$

i	T_1	T_2	T_3	T_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	64
2	0	0	32	48
3	0	16	32	80
4	8	20	50	89

• $T_1^{(k+1)} = \frac{T_2^{(k)}}{2}$

• $T_2^{(k+1)} = \frac{T_1^{(k+1)} + T_3^{(k)}}{2}$

• $T_3^{(k+1)} = \frac{T_2^{(k+1)} + T_4^{(k)}}{2}$

• $T_4^{(k+1)} = \frac{T_3^{(k+1)} + 128}{2}$

c) $\beta_1 = 1/2 = 0,5$

$\beta_2 = (\beta_1 + 1)/2 = 0,75$

$\beta_3 = (\beta_2 + 1)/2 = 0,875 = M < 1 \therefore$ satisfaz Sassenfeld e a diagonal é fracamente dominante, então está garantida a convergência pelo método de G.S.

Jandaia

data • •

S T Q Q S S D

⑤ a) Linhas: • $\lambda_1 = \frac{8+2}{5} = \frac{4}{5}$

• $\lambda_2 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} > 1$ ∴ não satisfaz critério das linhas.

• $\lambda_3 = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$

Sassenfeld: $\beta_1 = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5}$

• $\beta_2 = \frac{3\beta_1 + 1}{3} = \frac{17}{15} > 1$ ∴ Não satisfaz Sassenfeld.

• $\beta_3 = \frac{1\beta_1 + 2\beta_2}{5}$ • $\frac{46}{75}$

b) Critério de Sassenfeld: • $\beta_1 = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$

• $\beta_2 = \frac{2\beta_1 + 2}{5} = \frac{16}{25}$ → $M = \beta_{máx} = \frac{63}{75} < 1$ ∴ É convergente por Sassenfeld.

• $\beta_3 = \frac{1\beta_1 + 3\beta_2}{3} = \frac{63}{75}$

c) Apesar de não satisfazer Sassenfeld, não se pode afirmar que o sistema não converge.

⑥ • $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; 2a. s.

• $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 6 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 & 6 & 2 \\ 2,5 & 9 & 4 \\ 8 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 6 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

• $\tilde{r}$ => $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix}$. $-(2^1/8)$. $-(1,5/8)$ $\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} 9 \\ -0,79 \\ -0,21 \end{bmatrix}$. $-0,67$ $\begin{bmatrix} 9 \\ -0,79 \\ 0,32 \end{bmatrix} = \tilde{r}^{(0)}$

(↳ $-0,31$; ↳ $-0,19$)

• C => $\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 9,3 & 4,9 & -0,79 \\ 0 & 0 & -0,7 & 0,32 \end{array}\right]$

• $c_3 = \frac{0,32}{-0,7} = -0,46$

• $c_2 = \frac{-0,79 - 4,9 \cdot -0,46}{9,3} = 0,16$

• $c_1 = \frac{9 - (-3)\cdot(-0,46) - (-1)\cdot 0,16}{1} = 0,98$

* não esquecer do ponto flutuante

Jandaia