Aluno(a): Rodolfo Akira Ozaki N° USP: 6846679

Monitor: Larissa

**Questão 1:** Os polinômios:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2 - 1/3$$

são ortogonais em relação ao produto interno $< p_k, p_l >= \int_{-1}^{1} p_k(x) p_l dx$.

a) Usando este fato, determine os coeficientes $a$, $b$ e $c$ para os quais o valor da integral abaixo seja o menor possível.

$$\int_0^{\pi} (cos(t) - a - bt - ct^2)^2 dt$$

b) Discuta com argumentos teóricos: Aproximar uma função por um polinômio, depende da base utilizada? Qual a diferença entre usar a base normal $(1, x, x^2)$ e usar uma base em que os polinômios são ortogonais? (Pode usar a aproximação de grau 2 acima para justificar sua resposta).

Observação: Apresente os cálculos de todas as integrais necessárias para a resolução da questão e se atente para a mudança de variável necessária.

Quero minimizar o valor de $\int_0^{\pi} (\cos t - a - bt - ct^2) dt$

Ou seja, quero aproximar $f(t) = \cos t$ por uma parábola $g(t) = a + bt + ct^2$.

Como foram dados os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$, devo usar este intervalo, onde existe ortogonalidade.

$$\underset{0 \quad t \quad \pi}{\longrightarrow} \underset{-1 \quad x \quad 1}{}$$

$$\frac{t-0}{\pi} = \frac{x+1}{2} \Rightarrow \boxed{t(x) = \frac{x+1}{2}\pi}$$

$$\langle p_0, p_0 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \, dx = 2$$

$$\langle p_1, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle p_2, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

$$\langle f, p_0 \rangle = \int_{-1}^{1} f(t(x)) dx = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{x+1}{2}\pi\right) dx = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2}\pi\right)\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle f, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cos\left(\frac{x+1}{2}\pi\right) dx = \frac{2}{\pi} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2}\pi\right)\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2}\pi\right) dx = +\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{x+1}{2}\pi\right)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{8}{\pi^2}$$

$$\langle f, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\cos\left(\frac{x+1}{2}\pi\right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cos\left(\frac{x+1}{2}\right)\pi \, dx - \frac{1}{3}\underbrace{\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{x+1}{2}\pi\right) dx}_{0} =$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 \cos\left(\frac{x+1}{2}\pi\right) dx = \underbrace{\frac{2x^2}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2}\pi\right)\Big|_{-1}^{1}}_{0} - \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1} x \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2}\pi\right) dx = -\frac{4}{\pi}\left[-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{x+1}{2}\pi\right)\Big|_{-1}^{1} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{x+1}{2}\pi\right) dx}_{0}\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left[-\frac{2}{\pi}\underbrace{\cos\pi}_{-1} - \left(-\frac{2(-1)}{\pi}\underbrace{\cos 0}_{1}\right)\right] = 0$$

Utilizando a mudança de intervalo, quero aproximar uma $g(t(x))$ no intervalo $[-1,1]$ com forma $g(x) = Ap_0(x) + Bp_1(x) + Cp_2(x)$

$$= A + Bx + C\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Da função dada $g(t) = a + bt + ct^2$, uso a transformação $t(x) = \left(\frac{x+1}{2}\pi\right)$

$$g(t(x)) = a + b\left(\frac{x+1}{2}\pi\right) + \underbrace{c\left(\frac{x+1}{2}\pi\right)^2}_{\frac{\pi^2}{4}c(x^2+2x+1)} = a + \frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{4} + \left(\frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{2}\right)x + \frac{c\pi^2}{4}x^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{c\pi^2}{4} + \frac{1}{3}\frac{c\pi^2}{4}$$

$$= a + \frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{3} + \left(\frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{2}\right)x + \left(\frac{c\pi^2}{4}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases} A = a + \frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{3} \\ B = \frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{2} \\ C = \frac{c\pi^2}{4} \end{cases}$$

A matriz se torna, então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + \frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{3} \\ \frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{2} \\ \frac{c\pi^2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8}{\pi^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + \frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{3} = 0 \\ \frac{b\pi}{2} + \frac{c\pi^2}{2} = -\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}^{4} \\ \frac{c\pi^2}{4} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + \frac{b\pi}{2} = 0 \\ b = -\frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{2}{\pi} \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\left(-\frac{24}{\pi^3}\right)\cdot\frac{\pi}{2} \\ b = -\frac{24}{\pi^3} \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \frac{12}{\pi^2} \\ b = -\frac{24}{\pi^3} \\ c = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{g(t) = \frac{12}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3}t}$$

$$\int_0^{\pi} g(t)\,dt = \int \frac{12}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3}t\,dt = \frac{12}{\pi^2}\int_0^{\pi} 1 - \frac{2t}{\pi}\,dt$$

$$= \frac{12}{\pi^2}\left[t - \frac{t^2}{\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{12}{\pi^2}\left[\pi - \pi + 0 - 0\right]$$

$$= 0$$

b) Quando se utiliza uma base de polinômios não-ortogonais o cálculo na hora de se fazer a matriz $A.x = b$ provavelmente não será diagonal, fazendo com que a solução do sistema linear seja mais difícil, demorado e possivelmente mais impreciso.

Aluno(a): Rodolfo Akira Ozaki N° USP: 6846079

Monitor: Marline

**Questão 2:** Análise harmônica - caso contínuo

a) Faça a análise harmônica da função 2-periódica, que em [-2,0] é dada por $f(x) = |x+1|$, até o harmônico de primeira ordem.

b) Faça a análise harmônica da função do item a), até o harmônico de segunda ordem.

Análise harmônica - caso discreto

Considere uma função $f$ tabelada abaixo.

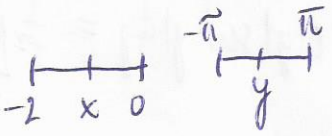
| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_j)$ | 126 | 159 | 191 | 178 | 183 | 179 | 176 | 149 |

a) Faça a análise harmônica discreta para a função $f$, até o harmônico de ordem 3.

b) Qual o maior harmônico possível para este conjunto de pontos?

c) O que deveria ser feito se o número de pontos fosse ímpar?

Análise Harmônica - caso contínuo




a) Mudança de ~~variável~~ intervalo de $[-2,0]$ para $[-\pi,\pi]$

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+\pi}{2\pi}$$

$$y = \pi x + \pi$$

$$x = \frac{1}{\pi}y - 1$$

Sabe-se que a função $f(x)$ é definida no intervalo $[-2,0]$

como: $f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{em } [-2,-1] \\ x+1, & \text{em } [-1,0] \end{cases}$

Considerando o novo intervalo: $F(y) = f(x(y)) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}y, & \text{em } [-\pi,0] \\ \frac{1}{\pi}y, & \text{em } [0,\pi] \end{cases}$

a) Quero aproximar $F(y)$ por $g_1(y) = a_0 + a_1\cos y + b_1 \operatorname{sen} y$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{\pi}y\right)dy + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}y\right)dy\right] = \frac{1}{2\pi^2}\left[-\int_{-\pi}^{0} y\,dy + \int_{0}^{\pi} y\,dy\right] = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{-y^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{y^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left[\left(0 - \frac{\pi^2}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2} - 0\right] = \frac{\pi^2}{2\pi^2} = 0{,}5$$

$\int y\cos y\,dy = y\operatorname{sen} y + \cos y$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\cos y\,dy = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} y\cos y\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} y\cos y\,dy\right] = \frac{1}{\pi^2}\left[-\int_{-\pi}^{0} y\cos y\,dy + \int_{0}^{\pi} y\cos y\,dy\right]$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\underbrace{-\left(\cancelto{0}{y\operatorname{sen} y} + \cos y\right)\Big|_{-\pi}^{0}}_{-2} + \underbrace{\left(\cancelto{0}{y\operatorname{sen} y} + \cos y\right)\Big|_{0}^{\pi}}_{-2}\right] = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\,\text{sen}\,y\,dy = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} y\,\text{sen}\,y\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} y\,\text{sen}\,y\,dy\right] = \frac{1}{\pi^2}\left[-\int_{-\pi}^{0} y\,\text{sen}\,y\,dy + \int_{0}^{\pi} y\,\text{sen}\,y\,dy\right]$$

$$\int y\,\text{sen}\,y\,dy = -y\cos y + \text{sen}\,y$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\underbrace{\left(y\cos y - \text{sen}\,y\right)\Big|_{-\pi}^{0}}_{-\pi} + \underbrace{\left(\text{sen}\,y - y\cos y\right)\Big|_{0}^{\pi}}_{\pi}\right] = 0.$$

A aproximação de $F(y)$ por $g_1(y) = 0{,}5 - \frac{4}{\pi^2}\cos y$ deve ser na variável $x$.

Aplicando $y = \pi x + \pi$, $g_1(y(x)) = g(x) = 0{,}5 + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)$

ou $g_1(x) = 0{,}5 - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x + \pi)$.

b) O polinômio de 2ª ordem é $g_2(y) = a_0 + a_1\cos y + b_1\,\text{sen}\,y + a_2\cos(2y) + b_2\,\text{sen}(2y)$, sendo que $a_0$, $a_1$, $b_1$ já foram calculados e podem ser reciclados.

$$\int y\cos 2y\,dy = \frac{y}{2}\text{sen}\,2y + \frac{1}{4}\cos 2y$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\cdot\cos(2y)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\left[-\int_{-\pi}^{0} y\cos 2y\,dy + \int_{0}^{\pi} y\cos 2y\,dy\right] = \frac{1}{\pi^2}\left[\underbrace{-\left(\cancelto{0}{\frac{y}{2}\text{sen}\,2y} + \frac{1}{4}\cos 2y\right)\Big|_{-\pi}^{0}}_{0} + \underbrace{\left(\frac{y}{2}\text{sen}\,2y + \frac{1}{4}\cos 2y\right)\Big|_{0}^{\pi}}_{0}\right]$$

$$\int y\,\text{sen}(2y)\,dy = -\frac{y}{2}\cos 2y - \frac{1}{4}\text{sen}\,2y$$

$$= 0$$

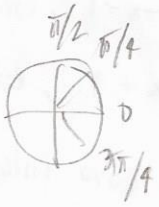
$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\,\text{sen}(2y)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\left[-\int_{-\pi}^{0} y\,\text{sen}\,2y\,dy + \int_{0}^{\pi} y\,\text{sen}\,2y\,dy\right] = \frac{1}{\pi^2}\left[\underbrace{\left(\frac{y}{2}\cos 2y + \cancelto{0}{\frac{1}{4}\text{sen}\,2y}\right)\Big|_{-\pi}^{0}}_{\left[0-\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)\right] = \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\left(\frac{y}{2}\cos 2y + \cancelto{0}{\frac{1}{4}\text{sen}\,2y}\right)\Big|_{0}^{\pi}}_{-\left[\frac{\pi}{2}-1-0\right] = -\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= 0.$$

Portanto, o polinômio que aproxima $g_2(y)$ é o mesmo de $g_1(y)$

$$g_2(x) = g_1(x) = 0{,}5 + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)$$

ou $g_1(x) = 0{,}5 - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x + \pi)$




## Análise Harmônica - caso discreto

a) Análise de 3ª ordem: $f(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\,\text{sen}\,x + a_2\cos 2x + b_2\,\text{sen}\,2x + a_3\cos 3x + b_3\,\text{sen}\,3x$

$$a_0 = \frac{1}{8}(126 + 159 + 191 + 178 + 183 + 179 + 176 + 149) = 167{,}625$$

$$a_1 = \frac{1}{4}\cdot\left[126\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{159\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)}_{0} + 191\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 178\underbrace{\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right)}_{-1} + 183\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 179\underbrace{\cos\left(\frac{6\pi}{4}\right)}_{0} + 176\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 149\underbrace{\cos\left(\frac{8\pi}{4}\right)}_{1}\right]$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= -19{,}98$

$\simeq -20.$

$$b_1 = \frac{1}{4}\left[126\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 159\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) + 191\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 178\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{4}\right) + 183\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 179\,\text{sen}\left(\frac{6\pi}{4}\right) + 176\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 149\,\text{sen}\left(\frac{8\pi}{4}\right)\right]$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $1$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $0$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $-1$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $0$

$= -12{,}42$

Exercício 02 – Rodolfo Akira Ozaki 6846679

Análise Harmônica – caso discreto

a) $a_0 = 167{,}625$

$a_1 = -19{,}98$

$b_1 = -12{,}42$

$a_2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{8} f(x_j)\cdot\cos\left(\frac{2\pi j}{4}\right) = 314{,}56$

$b_2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{8} f(x_j)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi j}{4}\right) = -14{,}5$

$a_3 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{8} f(x_j)\cos\left(\frac{3\pi j}{4}\right) = 289{,}36$

$b_3 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{8} f(x_j)\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi j}{4}\right) = -2{,}42$

$f(x) = 167{,}625 - 19{,}98\cos x - 12{,}42\,\mathrm{sen}\,x + 314{,}56\cos 2x - 14{,}5\,\mathrm{sen}\,2x + 289{,}36\cos 3x - 2{,}42\,\mathrm{sen}\,3x.$

b) O valor máximo possível para o conjunto de 8 pontos é ordem ~~4~~ 3, pois a maior frequência de aproximação deve ocorrer para $n < N$, sendo $2N = 8$ e $n, N \in \mathbb{N}$.

c) Vou perguntar o que fazer na Monitoria.

$$\int t\cos t\,dt = t\,\text{sen}\,t + \cos t$$

$$\int t\,\text{sen}\,t\,dt = -t\cos t + \text{sen}\,t$$

$$\int t\cos 2t\,dt = \frac{t}{2}\,\text{sen}\,2t + \frac{1}{4}\cos 2t$$

$$\int t\,\text{sen}\,2t\,dt = \frac{-t}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2t$$

$$\int t^2\cos t\,dt = t^2\,\text{sen}\,t + 2t\cos t - 2\,\text{sen}\,t$$

Aluno(a): Rodolfo Akira Ozaki N° USP: 6846679

Monitor: Nelson

**Questão 3:** Considere a tabela de valores da função $f(x) = \cos(x)$.

| $x$ | -1.157 | -0.7708 | -0.3708 | 0.4292 | 0.8292 | 1.229 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.4021 | 0.7174 | 0.932 | 0.9093 | 0.6755 | 0.3352 |

1. Calcule $\cos(0)$ aproximando $f$ por polinômios interpoladores de Lagrange de graus 1, 3 e 5. Todos os polinômios devem ser construídos considerando zero como ponto central.
2. Delimite o erro cometido pelas aproximações feitas no item 1.
3. Calcule $\arccos(0)$ por meio do polinômio de Lagrange de grau 3, obtido com os dados tabelados também centrados no zero. Avalie os erros absoluto e relativo.

Observação: Em todos os cálculos utilize, como mínimo, 6 algarismos significativos.

1. $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$

$f(x) = \cos x$. Desejo aproximar $x = 0$.

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1,157 | -0,7708 | -0,3708 | 0,4292 | 0,8292 | 1.229 |
| $f(x_i)$ | 0.4021 | 0,7174 | 0,932 | 0,9093 | 0,6755 | 0,3352 |

$p_1(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$, tomando $x_0 = -0,3708$ e $x_1 = 0,4292$.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{x - 0,4292}{(-0,3708 - 0,4292)} \Rightarrow L_0(0) = 0,5365$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{x + 0,3708}{(0,4292 + 0,3708)} \Rightarrow L_1(0) = 0,4635$$

$$p_1(0) = 0,5365 \cdot 0,932 + 0,4635 \cdot 0,9035 = \boxed{0,918790 = p_1(0)}$$

$p_3(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + L_3(x) f(x_3)$, sendo: $x_0 = -0,7708$, $x_1 = -0,3708$, $x_2 = 0,4292$, $x_3 = 0,8292$

$$\circledast\ L_0(0) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = -0,171829$$

$$\circledast\ L_1(0) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = +0,714380$$

$$\circledast\ L_2(0) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = +0,617177$$

$\circledast\ L_3(0) = -0,159728$

$p_3(0) = -0,171829 \cdot 0,7174 + 0,714380 \cdot 0,93 + 0,617177 \cdot 0,9093 - 0,159728 \cdot 0,6755$

$\boxed{p_3(0) = 0,995835}$

[Cont.] 1. $p_5(x) = \sum_{k=0}^{5} L_k(x) \cdot f(x_k)$, sendo $x_0 = -1,157$, $x_1 = -0,7708$, $x_2 = -0,3708$, $x_3 = 0,4292$, $x_4 = 0,8292$, $x_5 = 1,229$

$L_0(0) = +0,8547716$

$L_1(0) = -0,316362$

$L_2(0) = +0,807637$

$L_3(0) = +0,691760$

$L_4(0) = -0,286022$

$L_5(0) = +0,0482155$

$p_5(0) = L_0(0) \cdot f(x_0) + L_1(0) f(x_1) + L_2(0) f(x_2) + L_3(0) f(x_3) + L_4(0) f(x_4) + L_5(0) f(x_5)$

$\boxed{p_5(0) = 0,999754}$

$x+x_1 \quad x+x_2 \quad x-x_3 \quad x-x_4 \quad x-x_5$

$- \quad - \quad - \quad - \quad -$

2. $E_1(0) \leq \dfrac{|(0+0,3708)(0,4292)|}{2!} \cdot \underbrace{\max_{\xi \in [x_0, x_1]} |f''(\xi)|}_{1} = 0,07957$

$f(x) = \cos x \qquad f'''(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(6)}(x) = -\cos x$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f^{(4)}(x) = \cos x$

$f''(x) = -\cos x \qquad f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$

$E_3(0) \leq \dfrac{|(0,7708)(0,3708)(0,4292)(0,8292)|}{4!} \cdot 1 = 4,238 \cdot 10^{-3}$

$E_5(0) \leq \dfrac{|(1,157)(0,7708)(0,3708)(0,4292)(0,8292)(1,229)|}{6!} \cdot 1 = 2,0089 \cdot 10^{-4}$

3. $p_3(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(-0,768002) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) \cdot (-2,604165)^{-1} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(2,604168)^{-1} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \cdot (-1,302087)^{-1} = 0.$

$x^3\left(-0,768002 - \dfrac{1}{2,604165} + \dfrac{1}{2,604168} - \dfrac{1}{1,302087}\right) +$

Ñ SEI FAZER AINDA!

Aluno(a): Rodolfo Akira Ozaki Nº USP: 6846679

Monitor: Guilherme

**Questão 4:** Considere a seguinte tabela:

| $xx$ | 0000 | 0055 | 1122 | 1155 | 2200 | 2255 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.0 | 1.1487 | 3.5201 | 4.9816 | 8.3890 | 13.682 |

a) Estime o valor de $f(1.0)$ construindo um polinômio interpolador de Newton de grau 2 com $x_0 = 0.5$, $x_1 = 1.22$ e $x_2 = 1.55$.

b) Substitua na tabela o ponto $(1.2, 3.5201)$ pelo ponto $(1.0, f(1.0))$ e construa a tabela de diferenças simples.

c) A partir da tabela construída no item anterior estime o valor de $f(1.7)$ utilizando um polinômio interpolador de Newton $p_3(x)$ de grau 3. Justifique a escolha conveniente de $x_0$, $x_1$, $x_2$ e $x_3$ para que o erro na interpolação seja o menor possível.

d) Construa um polinômio interpolador de Newton $p_2(x)$ de grau 2 a partir de um subconjunto dos pontos utilizados no item anterior e calcule o valor de $p_2(1.7)$. Observe que é possível utilizar a mesma tabela de diferenças simples já construída anteriormente. Se quisermos considerar pontos não consecutivos para construir um polinômio interpolador, é possível usarmos subtabelas da tabela de diferenças já construída?

e) Estime o erro cometido na aproximação de $f(1.7)$ no item c) supondo que não tenha ocorrido erro no cálculo de $f(1.0)$.

"Quando a impressão da lista é parecida com como eu entendo a disciplina."

a) Estimar $f(1,0)$ com polinômio de Newton de grau 2 com $x_0 = 0,5$, $x_1 = 1.2$ e $x_2 = 1,5$

(Diferenças divididas)

| $x$ | ordem 0 $f(x)$ | ordem 1 | ordem 2 |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 1.1487 | 3.3877 | 1,484 |
| 1,2 | 3.5201 | 4.8717 | |
| 1,5 | 4.9816 | | |

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\overbrace{f[x_0, x_1]}^{\text{ordem 1}} + (x - x_0)(x - x_1)\overbrace{f[x_0, x_1, x_2]}^{\text{ordem 2}}$$

$$= 1,1487 + (x - 0,5) \cdot 3.3877 + (x - 0,5)(x - 1,2) \cdot (1.4840)$$

$$p_2(1.0) = 2.6942$$

b) Diferenças simples

| $x$ | $f(x)$ 00 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0 | 1.1487 | 0.3968 | 0.3451 | 0.033 | 0.3525 |
| 0.5 | 1.1487 | 1.5455 | 0.7419 | 0.3781 | 0.3855 |
| 1.0 | 2.6942 | 2.2874 | 1.1200 | 0.7656 |
| 1.5 | 4.9816 | 3.4074 | 1.8856 |
| 1.7 ← 2.0 | 8.3890 | 5.2930 |
| 2.5 | 13.682 | |

c) O valor de $f(1.7)$ deve ser aproximado num polinômio interpolador de Newton de grau 3 por 4 pontos, que devem estar mais próximos de 1.7 (preferencialmente com 1.7 entre os 4 pontos selecionados), como $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.0$ e $x_3 = 2.5$.

[cont.] c) $p_3(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)\Delta x^{(0)}}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\Delta x^{(1)}}{h^2 2!} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta x^{(2)}}{h^3 3!}$

$$= 2.6942 + \frac{(x-1.0).2,2874}{0.5} + \frac{(x-1.0)(x-1.5).1.1200}{0.5.\cancel{(0.5)}.\cancel{2}} + \frac{(x-1.0)(x-1.5)(x-2.0).0.7656}{\cancel{3.2}.\cancel{0,5}.(0,5)^2}$$

$p_3(1.7) = 3.3873$ → Observa-se que a aproximação não foi boa [caiu fora do intervalo entre $f(1.5)$ e $f(2.0)$]

d) Do subconjunto anterior, o ponto $x_0 = 1.0$ não foi boa aproximação. Portanto, mesmo que o ponto $x_2 = 2.5$ esteja mais distante de $x = 1,7$, aparentemente o resultado se aproxima do intervalo correto.

$x_0 = 1.5$, $x_1 = 2.0$, $x_2 = 2.5$.

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)\Delta x^{(0)}}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!.h^2}\Delta x^{(1)}$$

$$p(1.7) = 4.9816 + \frac{(1,7-1,5).3,4074}{0,5} + \frac{(1,7-1,5)(1,7-2,0)}{\cancel{2}.\cancel{(0,5)}.0,5}.1.8856 = 6,1183$$

É possível usar tabelas ou subtabelas com pontos não consecutivos. Eventualmente as fórmulas no momento do cálculo para pontos não consecutivos terão diferente valor de h. Ou seja, em algum momento será necessário desconsiderar uma parte da tabela para calcular a diferença simples entre termos não consecutivos (e seu respectivo h com valor diferente dos outros).

e) $E_n(x) \simeq |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|.\text{máx}\{|\text{dif. simples ordem } (n+1)|\}$

$$E_3(1,7) \simeq |(1,7-1,0)(1,7-1,5)(1,7-2,0)(1,7-2,5)|.(0,3875)$$

$$= 0.01302$$

$E_3(1,7)$ é bastante alto pois a precisão é de $10^{-4}$ sendo o erro de ordem $10^{-2}$.

Aluno(a): Rodolfo Akira Ozaki N° USP: 6846679

Monitor: André

**Questão 5:** Considere a função $f(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$. $e^{-\frac{t^2}{2}}$ $-\frac{2t}{2}$

a) Calcule $\int_{-1}^{0} f(t)dt$ pelo método do integração dos trapézios com 11 pontos.

b) Escreva a fórmula para erro de integração dos trapézios

$$E_T = \int_{-1}^{0} f(t)dt - \underbrace{h[0.5f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_9) + 0.5f(x_{10})]}_{T}$$

em função das derivadas de $f$.

c) Delimite o erro de integração $E_T$.

d) O valor de T, calculado no primeiro item, é maior ou menor do que o valor exato da integral?

e) Calcule a mesma integral utilizando a regra de Simpson com 11 pontos.

f) Escreva a fórmula para erro de integração de Simpson

$$E_S = \int_{-1}^{0} f(t)dt - S$$

g) Determine um número de pontos suficiente para que o erro de integração da fórmula de Simpson seja inferior à $10^{-8}$.

a) $n = 10$. Montar tabela.

| | $t$ | $f(t)$ |
|---|---|---|
| $x_{10}$ | 0 | 1 |
| $x_9$ | -0,1 | 0,995012 |
| $x_8$ | -0,2 | 0,980199 |
| $x_7$ | -0,3 | 0,956000 |
| $x_6$ | -0,4 | 0,923116 |
| $x_5$ | -0,5 | 0,882497 |
| $x_4$ | -0,6 | 0,835270 |
| $x_3$ | -0,7 | 0,782704 |
| $x_2$ | -0,8 | 0,726149 |
| $x_1$ | -0,9 | 0,666977 |
| $x_0$ | -1,0 | 0,606531 |

$$\int_{-1}^{0} f(t)dt = \int_{-1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{h}{2}\left[1f(0) + 2\cdot[f(-0,1) + f(-0,2) + \ldots + f(-0,9)] + 1.f(-1,0)\right]$$

$$= \frac{0,1}{2}(1.1 + 2.0,995012 + 2.0,980199 + \ldots + 2.0,666977 + 0,606531)$$

$$= \frac{0,1}{2} \cdot 17,10238 = 0,855119$$

b) $E_T = \frac{1}{12n^2} \max_{\xi \in [-1,0]} |f''(\xi)|$

$$f'(t) = -\frac{(2t)}{2} e^{-\frac{t^2}{2}} = -t e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$f''(t) = -1 e^{-\frac{t^2}{2}} - t.(-t) e^{-\frac{t^2}{2}} = (-1 + t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

em $t = 0$, $f''(0) = 1$.

$$E_T = \frac{1}{12.10^2} \cdot 1 = \frac{1}{1200} = 8,33.10^{-4}$$

c) $E_T = \frac{[0-(-1)]^3}{12n^2} \cdot \max_{\xi \in [-1,0]} |f''(\xi)| = \frac{1}{1200} = 8{,}33 \cdot 10^{-4}$ $\left[ E_T = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |f''(\xi)| \right]$

d) O valor de T é menor, pois a função é crescente e tem concavidade para baixo, então a curva terá sempre maior valor do que a aproximação por T, tend. integral exata maior.

e) Devo fazer outra tabela, com subdivisão menor.

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $x_{15}$ | $x_{16}$ | $x_{17}$ | $x_{18}$ | $x_{19}$ | $x_{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1,0 | -0,95 | -0,9 | -0,85 | -0,8 | -0,75 | -0,7 | -0,65 | -0,6 | -0,55 | -0,5 | -0,45 | -0,4 | -0,35 | -0,3 | -0,25 | -0,2 | -0,15 | -0,1 | -0,05 | 0 |
| * | 0,636832 | * | 0,696805 | * | 0,75484 | * | 0,809572 | * | 0,859673 | * | 0,903707 | * | 0,940508 | * | 0,969233 | * | 0,988713 | * | 0,998757 | * |

* → está na tabela anterior

$$S = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + f(x_{2n})\right] = \frac{0-(-1)}{20 \cdot 3}\left[0{,}606531 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}636832 + 2 \cdot 0{,}666977 + \ldots + 1 \cdot 1\right]$$

$$= \frac{1}{60} \cdot 51{,}33747$$

$$= 0{,}855624$$

f) $E_S \leq \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} \cdot \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |f^{(4)}(\xi)| = \frac{[0-(-1)]^5}{2880 \cdot n^4} \cdot \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |f^{(4)}(\xi)|$

$f''(t) = (-1+t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$ $\quad -t^3+t$

$f'''(t) = 2t e^{-\frac{t^2}{2}} + (-1+t^2) \cdot (-t) e^{-\frac{t^2}{2}} = (-t^3+3t) e^{-\frac{t^2}{2}}$

$f^{(4)}(t) = (-3t^2+3) e^{-\frac{t^2}{2}} - t(t^3+3t) e^{-\frac{t^2}{2}} = (-t^4 - 6t^2 + 3) e^{-\frac{t^2}{2}}$

Em $t=0$, $f^{(4)}(0) = 3$

$\therefore \max_{\xi \in [-1,0]} |f^{(4)}(\xi)| = 3$

$$\boxed{E_S \leq \frac{3}{2880 n^4}}$$

g) $E_S \leq \frac{1}{2880 \cdot n^4} \cdot 3 \leq 10^{-8}$

Para ser menor do que $10^{-8}$,

$$n^4 \geq \frac{3}{2880} \cdot 10^8$$

$$n^4 \geq 104166$$

$n \geq 17{,}9$ ou seja $\boxed{n \geq 18}$