MAP 3121 – Métodos Numéricos e Aplicações

Prova 2 – 30/06/2018 – Duração: 2 horas

Gabarito Extra Oficial – resolução por: Erick Brunoro Mesquita

Questão 1) Aproxime $f(x) = x^{1/3}$ por um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a dois de forma a minimizar o erro E dado por

$$E = [f(-1) - p(-1)]^2 + \int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx + [f(1) - p(1)]^2$$

Resolução:

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que: $p(x) = ax^2 + bx + c$

Temos: $f(-1) = -1, f(1) = 1, p(-1) = a - b + c$ e $p(1) = a + b + c$

$$[f(-1) - p(-1)]^2 = a^2 - 2ab + 2ac + 2a + b^2 - 2bc - 2b + c^2 + 2c + 1$$

$$[f(+1) - p(+1)]^2 = a^2 + 2ab + 2ac - 2a + b^2 + 2bc - 2b + c^2 - 2c + 1$$

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx = \frac{4ac}{3} + \frac{2a^2}{5} + \frac{2b^2}{3} + 2c^2 - \frac{12b}{7} + \frac{6}{5}$$

Temos:

$$E = \frac{16ac}{3} + \frac{8b^2}{3} + \frac{12a^2}{5} + 4c^2 - \frac{40b}{7} + \frac{16}{5}$$

Queremos encontrar a, b, c que minimizem o erro, para isso calculamos:

$$\nabla E = \vec{0}$$

Que resulta no sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial a} = \dfrac{16c}{3} + \dfrac{24a}{5} = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = \dfrac{16b}{3} - \dfrac{40}{7} = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial c} = \dfrac{16a}{3} + 8c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{15}{14} \approx 1{,}0714286\ldots \\ c = 0 \end{cases}$$

Portanto: $p(x) = \frac{15}{14}x \approx 1{,}0714286x$ e o erro mínimo vale: $E = \frac{34}{245}$

Questão 2) Mediu-se um sinal periódico de período P nos instantes uniformemente espaçados $t_i = ih,\ i \epsilon \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 7,\ h = P/8$, obtendo-se os seguintes valores:

t	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
s(t)	1	-1	2	0	1	-1	3	1

a) Determine qual o sinal que se obtém após aplicar um filtro que remove o harmônico de ordem 2 do sinal original

b) Na expansão $s(t) = \sum_{k=-3}^{4} a_k e^{jkt}$, onde $j^2 = -1$, qual o valor de a_2?

Resolução:

Transformada Discreta de Fourier:

$$a_k = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{2N-1} s(t_i) e^{-jkt_i}, k = 1 - N, \dots, N$$

Onde $t_i = i\pi/N$ e, como são 8 pontos, N=4:

$$a_k = \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{7} s(t_i) e^{-jk\frac{i\pi}{4}}, \qquad k = -3, -2, \dots, 4$$

Temos então, com 5 algarismos significativos:

$a_0 = \quad 0{,}75000$	$a_4 \ = \ 1$
$a_1 = \quad 0{,}08839 + j0{,}21339$	$a_{-1} = \quad 0{,}08839 - j0{,}21339 = a_1^*$
$\boldsymbol{a_2 = -0,37500 + j0,37500}$	$a_{-2} = -0{,}37500 - j0{,}37500 = a_2^*$
$a_3 = -0{,}08839 - j0{,}03661$	$a_{-3} = -0{,}08839 + j0{,}03661 = a_3^*$

Transformada Inversa de Fourier:

$$s(t_i) = \sum_{k=1-N}^{N} a_k e^{jkt_i} = \sum_{k=-3}^{4} a_k e^{jk\frac{i\pi}{4}}, \qquad i = 0, 1, \dots, 7$$

Aplicando o filtro, isto é, considerando $a_2 = a_{-2} = 0$:

t	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
s_2(t)	1,75	-0,25	1,25	-0,75	1,75	-0,25	2,25	0,25

Questão 3) A velocidade de um foguete varia com o tempo de acordo com a seguinte expressão:

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

Onde $u = 2 \cdot 10^3\, m/s$, $m_0 = 14 \cdot 10^4 kg,$ $q = 21 \cdot 10^2\, kg/s$ e $g = 9{,}8\, m/s^2$

Determine a velocidade média do foguete no intervalo de 0 a 4 s com erro menor que 0,05 m/s, usando o método dos trapézios.

Dado: $|E_t| \leq \max|f''(x)|\,(b-a)h^2/12$

Resolução:

A Velocidade Média é dada por:

$$v_m = \frac{1}{4}\int_0^4 v(t)dt$$

Vamos resolver a integral numericamente pelo método dos trapézios. Para isso, primeiro devemos calcular o maior passo h para que o erro fique dentro da margem de erro dada:

$$|E_t| \leq \max|v''(t)|\,(4-0)\frac{h^2}{12} \leq 0{,}05 * 4$$

Note que o erro de 0,05 descrito no enunciado é o erro máximo da velocidade média (v_m). Como a integral é dividida por 4, o erro máximo da integral pode ser 4 vezes maior que o da velocidade média.

Onde

$$v''(t) = \frac{uq^2}{(m_0 - qt)^2}$$

Como $m_0 \gg 4q,$ $\max|v''(t)| = v''(4) = \frac{1125}{2209}$

Temos então:

$$\frac{1125}{2209} \cdot \frac{h^2}{3} = 0{,}20$$

$$h \leq \frac{47\sqrt{3}}{75} \approx 1{,}08542$$

Adotamos, portanto: $h = 1$

$$\int_0^4 v(t)dt \approx A = \frac{1}{2}[v(0)\ +2\left(v(1)+v(2)+v(3)\right)+v(4)]$$

$v(0) = 0,$ $v(1) = 20{,}42726,$ $v(2) = 41{,}31841,$
$v(3) = 62{,}68788$ e $v(4) = 84{,}55081$

$$A = 166{,}70897$$

E finalmente:

$$v_m \approx \frac{1}{4}A = 41{,}67724$$

Testa-se agora o erro, para verificar se está dentro do especificado. Inicialmente calcula-se o valor correto da função que se quis aproximar:

$$v_m = \frac{1}{4}\int_0^4 u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt\,dt$$

$$v_m \cong 41{,}63735$$

O erro, então, vale:

$$E = 41{,}63735 - 41{,}67724 = 0{,}03989 < 0{,}05$$

Como o erro obtido está dentro do limite especificado, o resultado é aceitável.

Questão 4) O método de Runge-Kutta de quarta ordem, para solução aproximada de uma equação diferencial

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0$$

é dado por:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Onde x_i aproxima a solução no instante $t_i = t_0 + hi$, onde:

$k_1 = f(t_i, x_i)$	$k_2 = f(t_i + 0{,}5h, x_i + 0{,}5hk_1)$
$k_3 = f(t_i + 0{,}5h, x_i + 0{,}5hk_2)$	$k_4 = f(t_i + h, x_i + hk_3)$

Determine qual a aproximação que se obtém para o valor de $x(1)$ ao se utilizar este método para resolver $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$ com um espaçamento $h = {}^{1}/_{n}$, com n qualquer. Avalie numericamente qual o valor obtido com $n = 1, n = 2$ e $n = 4$ e compare com o valor da solução exata da equação diferencial.

Resolução:

1) **<u>Solução exata:</u>**

Passando para o domínio de Laplace:

$$sX(s) - x(0) = X(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s-1}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = e^t$$

Solução exata = $x(1) = e \approx 2{,}718282$

2) <u>Método de Runge-Kutta</u>

Dado no enunciado: $t_0 = 0$ e $x_0 = 1$.

2.1) Resolução Lenta:

Para $n = 1, h = 1, i = 0$:

$k_1 = 1$	$k_2 = 1 + 0{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$
$k_3 = 1 + 0{,}5 \cdot 1{,}5 = 1{,}75$	$k_4 = 1 + 1{,}75 = 2{,}75$

$$x_1 = x(1) = 1 + \frac{1}{6}(1 + 2 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}75 + 2{,}75) \approx 2{,}708333$$

Para $n = 2$ e $n = 4$ é preferível utilizar o método recursivo por ser muito mais rápido.

2.2) Resolução Recursiva:

$x_i = x(i \cdot h)$

Como $f\big(t, x(t)\big) = x'(t) = x(t)$:

$k_1 = x_i$	$k_2 = x_i(1 + {}^{h}\!/_{2})$
$k_3 = x_i(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4})$	$k_4 = x_i(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4})$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(x_i + 2x_i\left(1 + \frac{h}{2}\right) + 2x_i\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) + x_i\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right))$$

$$x_{\mathrm{i+1}} = x_{\mathrm{i}}(\frac{h^4}{24} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^2}{2} + h + 1)$$

Tornando-a recursiva:

$$x((i+j)h) = x_{\mathrm{i+j}} = x_i(\frac{h^4}{24} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^2}{2} + h + 1)^j$$

Iniciando em $i = 0$, tomando $j = n$, e como $h = 1/n$:

$$x(1) = x_{\mathrm{n}} = x_0(\frac{1}{24n^4} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + 1)^n$$

$$n = 2 \Rightarrow x(1) \approx 2{,}717346$$

$$n = 4 \Rightarrow x(1) \approx 2{,}718210$$

Comparação dos resultados, com 6 algarismos decimais:

n	$x(1)$	$\|Erro\|$
$n = 1$	2,708333	$9{,}948 \cdot 10^{-3}$
$n = 2$	2,717346	$9{,}356 \cdot 10^{-4}$
$n = 4$	2,718210	$7{,}190 \cdot 10^{-5}$
Solução Exata	2,718282	0

Pode-se notar que o erro diminui exponencialmente conforme se diminui o espaçamento.