MAP 3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Prova 1 - 28/04/2018 - Duração: 2 horas

Questão 1 (4.0 pontos) Na resolução do sistema linear abaixo

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utilizou-se o método de decomposição LU com pivotação parcial (condensação pivotal) com aritmética de ponto flutuante com 2 algarismos significativos. Chegou-se à solução $x = (1.6, 1.8, -2.0)$, após a obtenção da seguinte decomposição da matriz A (eventualmente permutada):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.33 & 1 & 0 \\ -0.33 & 0.82 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3.3 & 2.7 \\ 0 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}$$

(a) Utilize a decomposição dada para efetuar uma etapa do método de refinamento da solução.
(b) Utilize um passo do método de Gauss-Seidel para estimar o erro da solução obtida no item a) em relação à solução exata do sistema.

Texto comum às questões 2 e 3: Ao se administrar A mg de um medicamento a um paciente, a concentração deste no sangue do paciente (em mg/L) é dada aproximadamente por uma função do tipo:

$$c(t) = Aate^{-\beta t}$$

onde t é o tempo em horas após a administração da medicação ao paciente.

Questão 2 (3.0 pontos) São administrados 500 mg de um medicamento a um paciente, caso em que os parâmetros são tais que $\alpha = 0.066$ e $\beta = 0.2$.
(a) Esboce o gráfico de $c(t)$ nas primeiras 24 horas.
(b) A concentração do medicamento não deveria baixar de 25 mg/L. Utilize o método de Newton para determinar em que instante isto ocorrerá (com erro menor que 1 segundo), caso nova dose de medicamento não seja aplicada ao paciente. Justifique a convergência do método de Newton.

Questão 3 (3.0 pontos) Ao se administrar 400 mg de um medicamento a outro paciente, foram medidas as concentrações deste em seu sangue de 2 em 2 horas conforme a tabela abaixo.

t (horas)	2	4	6	8	10
c(t) (mg/L)	51.34	52.72	40.60	27.79	17.84

Utilize um método de mínimos quadrados para estimar os parâmetros α e β neste caso.

P1 numérico 2018 - Gustavo H. B. Gaspar

Q1.a.

- cálculo de $r^{(0)}$ → 4 a.s.

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,8 \\ -2,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,8 \\ 1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- resolver $A \cdot C^{(0)} = r^{(0)} \rightsquigarrow \tilde{A} \cdot C^{(0)} = \tilde{r}^{(0)}$

$$r^{(0)} = \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{permutas}}$$ devemos permutar quais linhas?

a partir de $P \cdot A = L \cdot U$, temos que a matriz permutação $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

∴ permutou-se as linhas 2 e 3

$$r^{(0)'} = \begin{matrix} \text{I} \\ \text{III} \\ \text{II} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ realizar cálculos c/ os multiplicadores de L

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-0,33) \\ \\ \\ \\ + \end{matrix} \begin{matrix} (0,33) \\ \\ \\ \\ + \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-0,82) \\ \\ + \end{matrix} \Rightarrow \tilde{r}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

∴ $\tilde{A} = U$, $\tilde{A}C^{(0)} = \tilde{r}^{(0)}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3,3 & 2,7 \\ 0 & 0 & -0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C_3 = \frac{0,2}{-0,9} = -0,2222 = -0,22$$

$$C_2 = \frac{0 - 2,7 \cdot (-0,22)}{3,3} = 0,1966 = 0,2$$

$$C_1 = \frac{0 + 1(0,2) - 1(-0,22)}{3} = 0,14$$

$\therefore \mathbb{C}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,14 \\ 0,2 \\ -0,22 \end{bmatrix}$

- refinando: $x^{(1)} = x^{(0)} + \mathbb{C}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,8 \\ -2,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,14 \\ 0,2 \\ -0,22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,74 \\ 2,0 \\ -2,22 \end{bmatrix}$

$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,7 \\ 2,0 \\ -2,2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ 2,0 \\ -2,25 \end{bmatrix}$ = resultado "real"

b. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$

$\beta_1 = 2/3$

$\beta_2 = \dfrac{2/3 + 1}{3} = 5/9$

$\beta_3 = \dfrac{2/3 + 5/9 \cdot 3}{3} = 7/9 < 1$

G.S.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{3} \\ x_2^{(1)} = \dfrac{2 + x_1^{(1)} - x_3^{(0)}}{3} \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1 - x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(0)} = 1,7 \\ x_2^{(0)} = 2,0 \\ x_3^{(0)} = -2,2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} = 1,733 \\ x_2^{(1)} = 1,978 \\ x_3^{(1)} = -2,222 \end{bmatrix}$$

após 1 iteração de Gauss-Seidel, temos que:

$\|x^{(k)} - \bar{x}\| < \dfrac{M^k}{1-M} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

erro real — erro estimado

$\Rightarrow$ erro estimado $= \dfrac{(7/9)^1}{2/9} (0,033)$ ($x_1^{(1)} - x_1^{(0)}$)

erro estimado = 0,1155

Q2. $c(t) = 500 \cdot 0{,}066 \cdot t \cdot e^{-0{,}2t}$

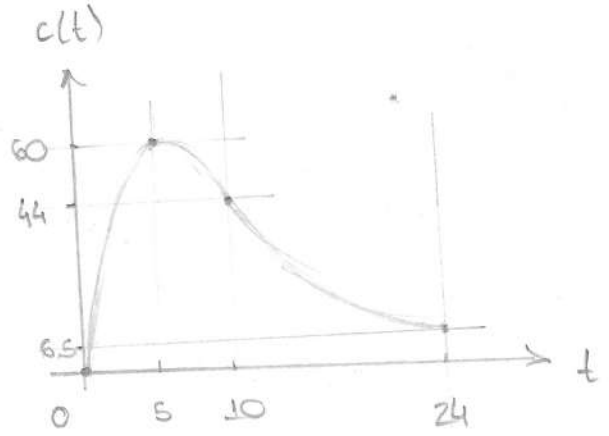
$c(t) = 33t\,e^{-0{,}2t}$

a. PODE FAZER CALCULANDO PONTO A PONTO, MAS CUIDADO C/ AS CONCAVIDADES.

- $c'(t) = 33\,e^{-0{,}2t}(1-0{,}2t)$
  - $[0,5[$, $c'(t) > 0 \Rightarrow$ crescente
  - $c'(5) = 0 \Rightarrow$ ponto de máximo
  - $]5,24]$, $c'(t) < 0 \Rightarrow$ decrescente

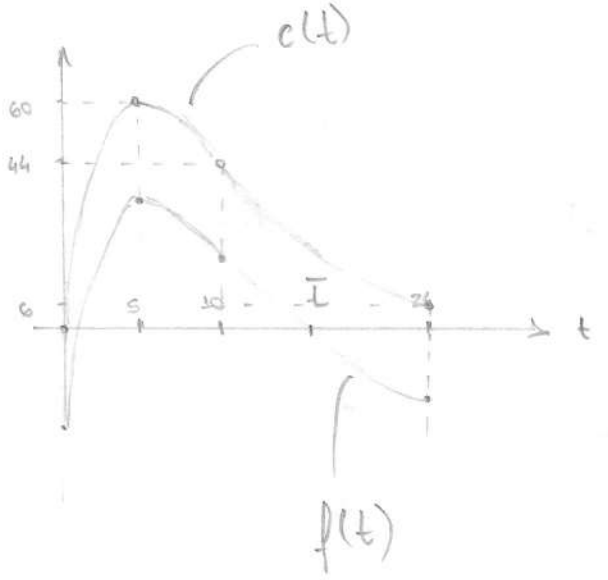
- $c''(t) = 33\,e^{-0{,}2t}(-0{,}4 + 0{,}04t)$
  - $[0,10[$, $c''(t) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa
  - $c''(10) = 0 \Rightarrow$ troca de concavidade
  - $]10,24]$, $c''(t) > 0 \Rightarrow$ conc. positiva

- $c(0) = 0$
- $c(5) = 60{,}7$
- $c(10) = 44{,}6606$
- $c(24) = 6{,}518$



b. $f(t) = 33t\,e^{-0{,}2t} - 25$, $\bar{t} \Rightarrow f(\bar{t}) = 0$

- a redução na concentração ocorre de 5 a 24 h
- $c(10) > 25 \Rightarrow \bar{t}$ está no intervalo $[10,24]$



$f(t)$

$f'(t) = c'(t)$

$f''(t) = c''(t)$

- no intervalo $[10, 24]$

$f'(t) < 0$ e $f''(t) > 0$ $\Rightarrow x_0 = 10$

$\varepsilon = 1s = \frac{1}{3600} h = 0,00027778\,h$ e $x_{n+1} = (x_n + 2\varepsilon) - \frac{f(x_n + 2\varepsilon)}{f'(x_n + 2\varepsilon)}$

i	x_n	$x_n + 2\varepsilon$	$f(x_n + 2\varepsilon)$	$f'(x_n + 2\varepsilon)$
0	10	10,00056	19,65816	-4,46606
1	14,40223	14,40279	1,6665387	-3,48169
2	14,8811562	14,88171	0,035586	-3,32481
3	14,8924151	14,89297	-0,00183	-3,32111
4	14,8924207			

$f(t)$ mudou de sinal $\Rightarrow$ passou por T

$x_{n+1} < x_n + 2\varepsilon$

critérios de parada

$\bar{x} = 14,892693 \pm 0,000278$ $\Rightarrow$ $c(14,892693) = 24,9991$

$c(x_n - \varepsilon) = 25,00002$

$\rightarrow x_n + \varepsilon$

Q3. $c(t) = 400\alpha t\, e^{-\beta t}$

$f(t) \sim c(t) = 400\alpha t\, e^{-\beta t} \Rightarrow \ln f(t) \sim \ln 400\alpha + \ln t - \beta t$

queremos descobrir α e β, portanto isolamos eles

$\therefore \ln(400\alpha) - \beta t \sim \ln f(t) - \ln t$

$$\ln 400\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} \ln 51,34 \\ \ln 52,72 \\ \ln 40,6 \\ \ln 27,79 \\ \ln 17,84 \end{bmatrix}}_{\ln f(t)} - \underbrace{\begin{bmatrix} \ln 2 \\ \ln 4 \\ \ln 6 \\ \ln 8 \\ \ln 10 \end{bmatrix}}_{\ln t}$$

$$\begin{bmatrix} 3,245323\ldots \\ 2,678701\ldots \\ 1,912009\ldots \\ 1,245235\ldots \\ 0,578858\ldots \end{bmatrix} \quad \uparrow \ln(f(t)/t)$$

$\langle 1, 1 \rangle = \sum_1^5 (1_i)^2 = 5$

$\langle 1, t \rangle = \sum_1^5 t_i = 30$

$\langle t, t \rangle = \sum_1^5 t_i^2 = 220$

$\langle 1, \ln \frac{f(t)}{t} \rangle = \sum_1^5 \ln \frac{f(t_i)}{t_i} = 9,560125\ldots$

$\langle t, \ln \frac{f(t)}{t} \rangle = \sum t_i \cdot \ln \frac{f(t_i)}{t_i} = 44,02796\ldots$

$$\begin{matrix} 1 & t & \ln \frac{f(t)}{t} \\ 1 \\ t \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 220 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln 400\alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,560175\ldots \\ 44,027496\ldots \end{bmatrix}$$

$\ln 400\alpha = 3,9119437\ldots \Rightarrow 400\alpha = e^{3,9119\ldots} \Rightarrow \alpha \approx 0,12499$

$-\beta = -0,3333198\ldots \Rightarrow \beta \approx 0,3333$

$\alpha \approx 0,12499$ e $\beta \approx 0,3333$