MAP 3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Prova 2 - 01/07/2017 - Duração: 2 horas e 15 minutos

Questão 1 (2.5 pontos) Calcule $\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\, dx$:
(a) pelo método dos trapézios com $h = 2$, $h = 1$ e $h = 0.5$
(b) pelo método de Romberg usando as 3 estimativas do item (a).
(c) Delimite o erro ao se usar o método de Simpsons com $h = 0.5$ e determine a partir disso entre quais valores se encontra a integral exata.

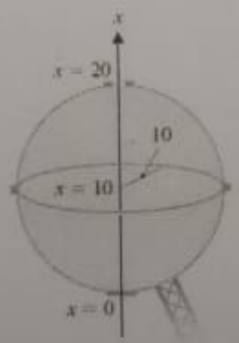
Questão 2 (2.5 pontos) Use o método de Euler com passo $h = 0.5$ para calcular uma aproximação para $x(1)$, onde $x(t)$ é solução da equação diferencial

$$x''(t) + tx'(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 4, \quad x'(0) = 2 \quad .$$

(escreva a equação como um sistema de primeira ordem ...)

Compare o resultado com o que se obtém com um método de ordem 2 (à sua escolha) com $h = 1$.

Questão 3 (2.5 pontos) Suponha um tanque de água esférico com raio 10 dm conforme a figura abaixo. Determine o nível de água $h \in [0, 20]$ (com erro menor que 1 mm) tal que o tanque fique preenchido com 1/3 do seu volume, utilizando para tal o método de Newton. Justifique a convergência do método de Newton.



Questão 4 (2.5 pontos): Determine A_1, A_2, A_3 e A_4 tal que $p(2.5) = A_1p(0) + A_2p(1) + A_3p(2) + A_4p(3)$ qualquer que seja o polinômio p de grau menor ou igual a 3. Seja $f(x) = cos(x/\pi)$ e use a expressão $f(2.5) = A_1f(0) + A_2f(1) + A_3f(2) + A_4f(3)$ para estimar $f(2.5)$ e delimite o erro cometido, de acordo com a estimativa de erro. Use o valor exato de $f(2.5)$ apenas para confirmar sua delimitação de erro.

Fórmulas de erros:

Simpsons : $|Erro| \leq max|f^{(4)}(x)|(b-a)h^4/180$

Interpolação (grau k): $(f(x)-p(x)) = \frac{(f^{(k+1)}(y_x))}{(k+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_k)$, para algum y_x no intervalo em questão. Em todas as fórmulas estamos supondo que f seja suficientemente diferenciável.

P2, Q1 (1)

Calcule $\int_{-2}^{2} e^{-x^2}\,dx$; $f(x) = e^{-x^2}$, $a = -2$, $b = 2$

(a) Com trapézios com $h = 2$, $h = 1$, $h = 0{,}5$

$$\int_a^b f(x) \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \quad \text{(trapézios compostos)}$$

$h = 2 \Rightarrow x_0 = -2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2$

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx \simeq \frac{2}{2}\left[e^{-4} + 2e^{0} + e^{-4}\right] = 2e^{-4} + 2 \simeq 2{,}0366$$

$h = 1 \Rightarrow x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx \simeq \frac{1}{2}\left[e^{-4} + 2e^{-1} + 2 + 2e^{-1} + e^{-4}\right]$$

$$= e^{-4} + 2e^{-1} + 2 \simeq 1{,}7540$$

$h = 0{,}5 \Rightarrow x_0 = -2,\ x_1 = -1{,}5,\ x_2 = -1,\ x_3 = -0{,}5,\ x_4 = 0$

$x_5 = 0{,}5,\ x_6 = 1,\ x_7 = 1{,}5,\ x_8 = 2$

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2}dx = \frac{1}{4}\left[2e^{-4} + 2e^{-(1{,}5)^2} + 2e^{-1} + 2e^{-(0{,}5)^2} + \frac{2}{4}\right]$$

$$= \frac{e^{-4}}{2} + e^{-(1{,}5)^2} + e^{-1} + e^{-(0{,}5)^2} + \frac{1}{2}$$

$$\simeq 1{,}761237$$

P2, Q1 ②

Romberg

m	$T_0(m)$	$T_1(m)$	$T_2(m)$
2	2,0366 →	1,65 98933 →	1,77054188
4	1,75407 →	1,76362635	
8	1,761237		

$h = \frac{b-a}{m}$

$\Rightarrow m = \frac{b-a}{h} = \frac{4}{h}$

$h = 2 \Rightarrow m = 2$

$h = 1 \Rightarrow m = 4$

$h = 0{,}5 \Rightarrow m = 8$

$T_0(m) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_{k-1}) + f(x_k) \right]$

$T_k(m) = \frac{4^k T_{k-1}(2m) - T_{k-1}(m)}{4^k - 1}$

$T_1(m) = \frac{4 T_0(2m) - T_0(m)}{3}$

$T_2(m) = \frac{16 T_1(2m) - T_0(m)}{15}$

$\int_2^2 e^{-x^2} \simeq T_2(m) = 1{,}77054188$

P2, Q1 (3)

$[-2,2]$ dividido em $2n = 8$ intervalos

c) Simpson com $h = 0,5$, $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{4}{2n} = \frac{2}{n} = 0,5 \Rightarrow n = \frac{2}{0,5} = 4$

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right]$$

$$\simeq \frac{h}{3}\left[f(-2) + 4f(-1,5) + 2f(-1) + \dots + f(2)\right]$$

$$|\text{Erro (Simpson)}| \leq \frac{\max_{[-2,2]} |f^{(4)}(x)| \, (b-a) \, h^4}{180}$$

$f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2 + 4x^2)$

$f'''(x) = +4x e^{-x^2} + 8x e^{-x^2} - 8x^3 e^{-x^2} = (12x - 8x^3) e^{-x^2}$

$f^{(4)}(x) =$ [illegible]

$= (12 - 24x^2) e^{-x^2} + (12x - 8x^3)(-2x) e^{-x^2}$

$= \left[12 - 24x^2 - 24x^2 + 16x^4\right] e^{-x^2}$

$= \left[12 - 48x^2 + 16x^4\right] e^{-x^2} = 4\left[3 - 12x^2 + 4x^4\right] e^{-x^2}$

$\max_{[-2,2]} |f^{(4)}(x)| \leq 4\left|(3 - 12x^2 + 4x^4)\right|$

P2. Q1 (4)

$q(x) = 3 - 12x^2 + 4x^4$

$q'(x) = -24x + 16x^3 = x(-24 + 16x^2)$

$= 8x(-3 + 2x^2)$

$q'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

usando a simetria, só precisamos estudar os casos $x = 0$ e $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$q''(x) = -24 + 48x^2$

$q''(0) = -24 < 0$, então 0 é um ponto de máximo (concavidade de q)

$q''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -24 + 48 \cdot \frac{3}{2} = -24 + 72 > 0$

então $\sqrt{\frac{3}{2}}$ é um ponto de mínimo (concavidade local de q)

$q(0) = 3 > 0$

$q\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 3 - 12 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - 18 + 9 = -6 < 0$

então $|q(x)| \leq \max\left(|q(0)|, \left|q\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right|\right) = 6$

então $\max_{x \in [-2,2]} |f^{(4)}(x)| \leq 4 \max_{[-2,2]} |q(x)| \leq 24$

então $|\text{Erro (Simpson)}| \leq \frac{24\,(b-a)\,h^4}{180} = 0{,}03333 = 3{,}33 \times 10^{-2}$

P2 2017, Q4 (1)

Seja $p(x)$ pol. de grau ≤ 3.

Seja $q(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, p(x_i)$, onde $x_i = i$ e $L_i(x)$ são os pol. de Lagrange para os x_i.

(por exemplo $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$)

Como $q(x_i) = p(x_i)$ para $i=0,1,2,3$, e existe um único pol. de grau ≤ 3 que passa por todos os pontos x_i, tem que ter $q(x) = p(x)$ ou $p(x)$ é de grau ≤ 3.

Assim ~~calculamos~~ temos $p(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, p(x_i)$

e $p(2,5) = \sum_{i=0}^{3} \underbrace{L_i(2,5)}_{=A_{i+1}}\, p(x_i)$ (temos $A_{i+1} = L_i(2,5)$, $i=0,1,2,3$)

$$A_1 = L_0(2,5) = \frac{(1,5)(0,5)(-0,5)}{(-1)(-2)(-3)} = \frac{0,375}{6} = 0,0625$$

$A_2 = L_1(2,5) =$
$A_3 = L_2(2,5) =$
$A_4 = L_3(2,5) =$
} Calcule A_2, A_3, A_4 e depois $A_1 p(0) + A_2 p(1) + A_3 p(2) + A_4 p(3)$

Temos $f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(y_x)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, com $y_x \in [0,3]$

$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^4\, 4!}(x)(x-1)(x-2)(x-3)$

P_2 2017 GU (2)

Obtemos com $\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{3} A_{i+1} f(x_i)$

$$|f(2,5) - \tilde{p}(2,5)| \leq \frac{\max_{t\in[0,1]} \left|\cos\left(\frac{t}{\pi}\right)\right|}{\pi^4\ 4!} \left((2,5)\cdot(1,5)(0,5)(0,5)\right)$$

$$\leq \frac{(2,5)\cdot(1,5)(0,5)(0,5)}{24\,\pi^4} \simeq 4,01 \cdot 10^{-4}$$

Valor exato (7 algarismos)

$f(2,5) = 0,6997315$

Calcule o erro exato $|f(2,5) - \tilde{p}(2,5)|$ e compare com a estimativa.