MAP 3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Prova 1 - 29/04/2017 - Duração: 2 horas e 15 minutos

Não é permitido o uso de calculadora nesta prova

Questão 1 (2.5 pontos) Seja A uma matriz tridiagonal:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

que possui decomposição LU (sem trocas de linhas) da forma abaixo:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & l_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & u_n \end{pmatrix}$$

(a) Escreva um algoritmo para calcular l_i, $2 \leq i \leq n$ e u_i, $1 \leq i \leq n$.
(b) Escreva também um algoritmo para a resolução de um sistema linear $Ax = b$ conhecendo-se a decomposição LU acima.

Questão 2 (2.5 pontos) Considere os pontos (x,y) a seguir: $(-2, 0)$, $(-1, -a)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2a)$.
(a) Mostre através do método de mínimos quadrados (MMQ) que se a=1 não existe polinômio de grau menor ou igual a 2 que passe por todos esses pontos.
(b) Encontre o valor de a tal que o polinômio de grau 2 que minimiza o erro quadrático referente a estes cinco pontos leva também ao menor erro possível no ponto $x = 0$. Esboce o gráfico do polinômio obtido.

Questão 3 (2.5 pontos) Determine o polinômio p de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima a função $f(t) = 1 - |2t - 5|$ no intervalo $[2, 3]$ pelo MMQ em relação ao produto interno $\langle f, g \rangle = \int_2^3 f(t)g(t)\, dt$. São dados os polinômios de Legendre (ortogonais em $[-1, 1]$) $p_0 = 1$, $p_1 = x$ e $p_2 = x^2 - 1/3$ e os valores $\langle p_0, p_0 \rangle = 2$, $\langle p_1, p_1 \rangle = 2/3$ e $\langle p_2, p_2 \rangle = 8/45$, em relação ao produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\, dx$.

Questão 4 (2.5 pontos) u, v, w e x são vetores do $\mathbb{R}^6$. Queremos determinar qual o vetor y do espaço gerado por u, v e w que se encontra mais próximo ao vetor x, na norma Euclidiana, o que nos leva a um problema de mínimos quadrados. Sabemos que os produtos escalares entre os vetores são:

$$u \cdot v = 6, \quad u \cdot w = 2, \quad v \cdot w = 2, \quad x \cdot u = 3, \quad x \cdot v = 3, \quad x \cdot w = 4$$

e que as normas ao quadrado de u, v e w são iguais a 8.
(a) Ordene os vetores da base de forma conveniente para garantir que o método de Gauss-Seidel quando aplicado ao sistema resultante seja convergente.
(b) Calcule 1 iteração de Gauss-Seidel a partir da aproximação inicial nula e delimite o erro (em relação à solução exata do sistema linear) após esta iteração.
(c) Estime o número de iterações para garantir um erro menor que 10^{-2}.

Erro para o método de Gauss-Seidel:

$$\|y^{(k)} - \bar{y}\| \leq \frac{\beta^k}{1 - \beta} \|y^{(1)} - y^{(0)}\|$$

Valores de logaritmos: $\log_{10}(2) \approx 0.3$, $\log_{10}(3) \approx 0.48$, $\log_{10}(4) \approx 0.6$,
$\log_{10}(7) \approx 0.85$, $\log_{10}(8) \approx 0.9$