MAP 3121 - MÉTODOS NUMÉRICOS E APLICAÇÕES

Prova 1 - 16/04/16 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos): As coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ no plano podem ser determinadas conhecendo-se a distância dele a três pontos de referência $P_i = (p_i, q_i)$, $i = 1, 2, 3$, não colineares. Se P está próximo à origem e os pontos de referência longe dela, a distância d_i de P a P_i pode ser aproximada pela expressão $d_i = r_i - p_i x/r_i - q_i y/r_i$ onde $r_i = \sqrt{p_i^2 + q_i^2}$. As medidas das distâncias estão sujeitas a erros. Foram medidas as distâncias $d_1 = 49.4$, $d_2 = 49.6$ e $d_3 = 51.2$ em relação aos pontos $P_1 = (50, 0)$, $P_2 = (-30, 40)$ e $P_3 = (-30, -40)$, respectivamente. Determine as coordenadas de P resolvendo o sistema linear sobredeterminado para (x, y) segundo o MMQ.

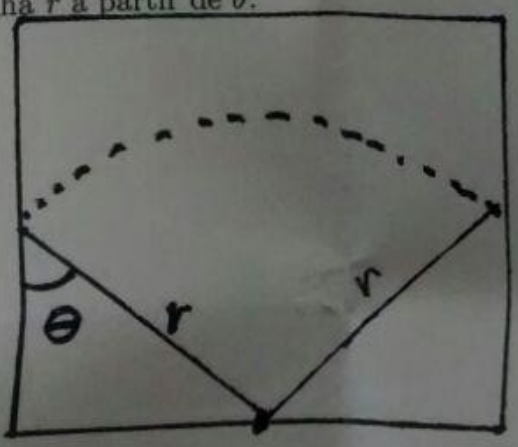
Questão 2: Considere o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

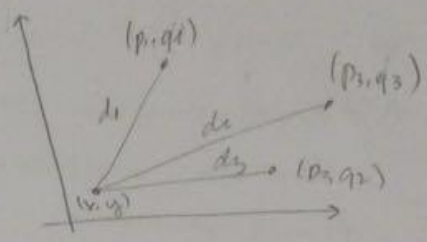
a) (2.0 pontos) Determine a decomposição LU da matriz do sistema ou da matriz obtida desta através de uma permutação de linhas. Utilize a decomposição para resolver o sistema. (Obs: trabalhe com frações.)

b) (2.5 pontos) Reescreva o sistema, ordenando as incógnitas e equações de forma que o método de Gauss-Seidel seja convergente quando aplicado ao sistema resultante. Calcule uma iteração do método a partir de $x^{(0)} = (0, -1/2, 1)$. Delimite o erro após esta iteração e estime o número de iterações necessárias para garantir um erro menor que 10^{-3}, sem utilizar o conhecimento da solução.

Questão 3 (3.0 pontos) Um cavalo está preso por uma corda em um pasto quadrado de lado igual a 200m, sendo que a extremidade da corda está presa a uma estaca fincada na metade de um dos lados. Determine o tamanho r da corda de modo que a área de pasto pára o cavalo seja metade da área total do pasto. Observação: Determine o ângulo θ (veja figura) com erro menor que 10^{-3} e obtenha r a partir de θ.



~~Q1~~ $P = (x, y)$ (P1)



$$\boxed{d_i \cong r_i - \frac{p_i}{r_i}x - \frac{q_i}{r_i}y}, \text{ onde } r_i = \sqrt{p_i^2 + q_i^2}$$

medidas: $d_1 = 49,4$ Pts $p_1 = (50, 0)$

$d_2 = 49,6$ $p_2 = (-30, 40)$

$d_3 = 51,2$ $p_3 = (-30, -40)$

$\Downarrow$

$r_1 = 50$

$r_2 = 50$

$r_3 = 50$

dist. da origem

Cada medida vai resultar em uma eqç linear em x e y → resolver sistema por MMQ

$$d_1 = 49,4 = 50 - \frac{50}{50}x - \frac{0}{50}y$$

$$d_2 = 49,6 = 50 - \frac{(-30)}{50}x - \frac{40}{50}y$$

$$d_3 = 51,2 = 50 - \frac{(-30)}{50}x - \frac{(-40)}{50}y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0,6 \\ -0,6x + 0,8y = 0,4 \\ +0,6x + 0,8y = +1,2 \quad (\times(-1)) \end{cases}$$

SISTEMA RESULTANTE

$$x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -0,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}}_{u} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 1,2 \end{pmatrix}}_{b}$$

MMQ. $\begin{cases} x, y \rightarrow \text{coeficientes} \\ u, v, b \end{cases}$

$\downarrow$

Sai da solução de: $\begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u,b\rangle \\ \langle v,b\rangle \end{pmatrix}$

$\langle u,u\rangle = 1^2 + 0,6^2 + 0,6^2 = 1,72$

prod. esc. normal (usual) $\langle v,v\rangle = 0 + 0,8^2 + 0,8^2 = 1,28$

$\langle u,v\rangle = 1.0 - 0,6.0,8 - 0,6.0,8 = 0$

u e v ⊥

$\langle u,b\rangle = 0,6 - 0,4.0,6 + 0,6.1,2 = 1,08$

$\langle v,b\rangle = 0.0,6 + 0,8.0,4 + 0,8.1,2 = 1,28$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1,72 & 0 \\ 0 & 1,28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,08 \\ 1,28 \end{pmatrix}$$

$1,72x = 1,08 \rightarrow \boxed{x = 0,628}$

$1,28y = 1,28 \rightarrow \boxed{y = 1}$

$$P = (x, y) = (0,628, 1)$$

Q2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

a) $A = LU$ $\boxed{\text{ou}}$ $PA = LU$ → permutação de A → temos essa opção pq LU é simples/e o resultado da eliminação gaussiana.

Vamos esquecer o lado direto e trabalhar na decomposição.

Eliminação

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III} \to \text{III} - m_{31}\text{I}]{\text{II} \xrightarrow{m_{21} = -1/2} \text{II} - m_{21}\text{I}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1/2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_2 = 3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$m_{31} = 0$

convenção de multiplicador

$$\begin{cases} m_{i,j} = \dfrac{a_j}{a_i} \\ a_j - m_{i,j} a_i = a_j' \end{cases}$$

$m_{21} = a_2/a_1$

$a_2' = a_2 - m_{21} a_1$

Obs: se fizéssemos a troca (2→3) $\boxed{\text{FIM}}$ antes, então não haveria pivoteamento depois

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{A'} \xrightarrow{\text{s/pivoteio}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

O correu troca de linha, portanto vamos analisar $P.A = A'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P \times A = A'$$

↳ 2 → 3 trocadas

- MONTA IDENTI//
- TROCA 0 por 1 em 2, 3 e 3, 2 e
- ZERA RESTO DA LINHA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{0} & 1 \\ 0 & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora obter decomposição LU.

Resposta:

$$PA = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{U}$$

reverte eliminação gaussiana

resultado da elim. gaussiana

multiplicadores

Verificar: $L \times U = PA$? SIM

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(satisfaz o sistema original)}$$

b) Por gauss-seidel:

Reescrever o sistema original

$$\begin{cases} 2x - y + 8z = 4 \\ -x + 1/2\,y + z = 1/2 \\ 2y + z = 3/2 \end{cases}$$

(1módulo)

- Critério das linhas: soma dos elementos fora da diagonal deve ser menor que o elemento da diagonal

→ Trocar col. 1 × 3

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow 2+1<8 \ \checkmark \\ \rightarrow 1+1<1/2 \ \times \\ \rightarrow 1+2<0 \ \times \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{|2|+|-1|}{|8|}$$

↓ taxa de contração pl crit. linhas

→ Trocar linhas 2, 3

Usamos isso

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow 1+2<8 \ \checkmark \\ \rightarrow 1+0<2 \ \checkmark \\ \rightarrow 1+\frac{1}{2}<1 \ \times \end{matrix}$$

Com o critério das linhas não funcionou

→ PORÉM, com o critério de Sassenfeld vai funcionar:

Critério de Sassenfeld:

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$

$\lambda = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ → taxa de contração pl gauss-seidel

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \max\left\{\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{15}{32}\right\}$$

→ Podemos adotar $\lambda > \beta_{max}$ se facilitar. Ex: vamos adotar $1/2 > 15/32$.

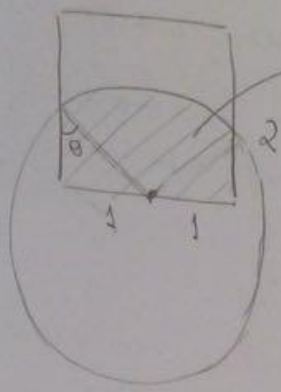
$$\beta_1 = \frac{|-1|+|2|}{|8|} = \frac{3}{8} \quad (= \lambda_1) < 1$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1|1| + 0}{2} = \frac{3/8}{2} = \frac{3}{16} < 1$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1|1| + \beta_2|1/2|}{1} = \frac{3/8 + 3/32}{1} = \frac{15}{32} < 1$$

Q3

1:100m



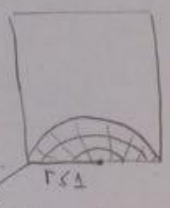
Área que o cavalo pode percorrer = Ap (pasto)

$$Ap = \frac{A_T}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2\,m^2$$

Definir θ ou r p/ que Ap = 2

→ Duas situações limite

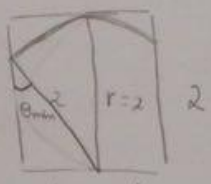
(I)



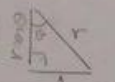
→ nesse caso Ap < 2, então não pode ser.

$\theta_{limite} = \frac{\pi}{2}$ $A = \frac{\pi r^2}{2} \leq \frac{\pi}{2} = 1{,}57 < 2$

(II)



$\sin\theta_{min} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{min} = \pi/6$

$A(\theta)$ = área de 2  + área do setor de $\measuredangle = 2\theta$ e raio r

$\frac{1 \cdot r\cos\theta}{2} \cdot 2 = r\cos\theta$

$\theta r^2 \left(\begin{matrix} 2\pi - \pi r^2 \\ 2\theta - A_{30} \end{matrix}\right)$

no caso (II): $A(\theta_{min}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \theta \cdot 2^2 > 2$

Portanto, nos interessa $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2$

→ r, θ são incógnitas

$A(r, \theta) = \theta r^2 + r\cos\theta$

Mas r, θ tem relação. Qual?

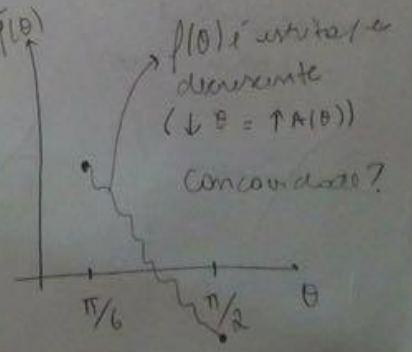
$\frac{1}{r} = \sin\theta$

$\therefore r = \sin\theta^{-1}$

Logo, $A(\theta) = \frac{\theta}{\sin^2(\theta)} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Equação:

$\tilde{f}(\theta) = A(\theta) - 2 = 0$



→ Temos que descobrir a concavidade p/ poder usar método de Newton

↓

escolher condição inicial

NEWTON

$$\tilde{f}(\theta) = \frac{\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 2$$

Intro não introduz novos zeros no intervalo, pq no intervalo $[\pi/6, \pi/2]$, $\sin\theta > 0$.

P/ simplificar, multiplicamos $\tilde{f}(\theta)$ por $\sin^2\theta$.

$$f(\theta) = \theta + \cos\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta$$

$$= \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} - 1 + \cos(2\theta)$$

→ Derivada fica mto difícil

$\sin(2\theta) = \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\therefore -\sin^2\theta = \cos(2\theta) - \cos^2\theta$

MUITO DIFÍCIL ACHAR CONDIÇÃO INICIAL! CHUTAR

• Newton p/ $\tilde{f}$:

$$\varphi(\theta) = \theta - \frac{\tilde{f}(\theta)}{\tilde{f}'(\theta)} = \theta - \frac{\left(\frac{\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 2\right)}{-\theta\sin(2\theta)/\sin^4\theta} \quad \times \sin^4\theta$$

$$= \theta - \frac{\theta\sin^2\theta + \cos\theta\sin^3\theta - 2\sin^4\theta}{\theta\sin(2\theta)}$$

CHUTE → $\theta_0 = \pi/4$

$\theta_1 = 0{,}967088$

⋮

$\theta_5 = 1{,}031158097$ → Novo candidato: $\bar{\theta} = 1{,}031$

$\theta_6 =$ "

estudo de sinal:

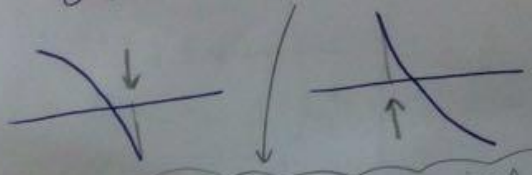
→ $\tilde{f}(\bar{\theta} + \underbrace{0{,}001}_{10^{-3}}) \simeq -1{,}04 \cdot 10^{-3} < 0$ ↳ pedido no enunciado

→ $\tilde{f}(\bar{\theta} - 0{,}001) = +1{,}946 \cdot 10^{-3} > 0$

$\therefore$ R. $1{,}031 \pm 0{,}001$

$r = 1{,}1657 \Rightarrow 116{,}6\,m$

Se tivesse achado a concavidade, poderia escolher o lado "bom":



lado no qual o sinal de f = sinal de f''