gabarito

MAP2121 Cálculo Numérico

Prova 1

1° semestre de 2013 – Prof. Claudio H. Asano – 11/04/2013

1. Aplique o Método de Newton à função $f(x) = -4x^3 + 2x^2 + x + 2$ para encontrar uma solução real da equação $f(x) = 0$ com precisão pré-fixada $\varepsilon = 10^{-3}$. Justifique tudo o que for necessário para garantir convergência.

2. Dado o sistema linear $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 4.10 & 2.50 & 4.30 \\ 2.30 & 4.60 & 4.00 \\ 4.80 & 6.00 & 6.60 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 43.8 \\ 68.0 \end{bmatrix}$$

resolva-o pelo Método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal, utilizando aritmética de ponto flutuante e 3 algarismos significativos. Não esqueça de arredondar após cada operação aritmética.

3. Dado o sistema linear $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} -3.80 & 2.10 & -3.20 \\ -4.60 & 0.800 & -7.40 \\ -2.80 & 4.10 & 2.00 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 5.60 \\ 7.00 \end{bmatrix},$$

após resolvê-lo utilizando o Método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos, obtivemos

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -4.60 & 0.800 & -7.40 \\ 0.609 & 3.61 & 6.51 \\ 0.826 & 0.399 & 0.310 \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 34.1 \\ 34.1 \\ -18.3 \end{bmatrix}.$$

Aqui, p representa a configuração ***final*** das linhas da matriz. Em outras palavras (caso prefira), no primeiro passo, permutou-se as linhas 1 e 2 e no segundo passo, permutou-se as linhas 2 e 3. Execute uma etapa de refinamento.

4. Sejam $f(x) = x^2 - 3x + 1$ e $\phi(x) = \dfrac{x^2+1}{3}$.

   (a) Mostre que se $\bar{x}$ é um ponto fixo de ϕ então $\bar{x}$ é uma raiz de f.

   (b) Mostre que a seqüência resultante do processo iterativo $x_{n+1} = \phi(x_n)$, com $x_0 \in [0, 1/2]$, satisfaz condições que asseguram sua convergência para uma raiz de f.

   (c) Determine n tal que $|x_n - \bar{x}| < 10^{-3}$, sabendo-se que x_0 foi escolhido em $[0, 1/2]$ com $|x_0 - \bar{x}| \leq 0.1$. Não calcule $\bar{x}$.

(A prova tem duração de 2 horas. Todas as questões valem 2.5 pontos.)

Q1) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 + x + 2$

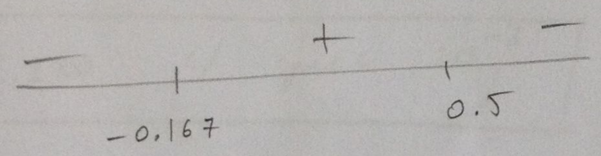
Localização

x	$f(x)$
1	1
2	−20

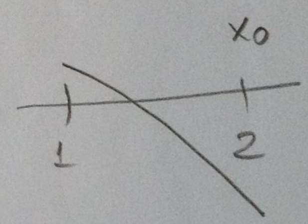
$>$ T. Bolzano $\Rightarrow \exists$ raiz $\bar{x} \in [1, 2]$

Convergência

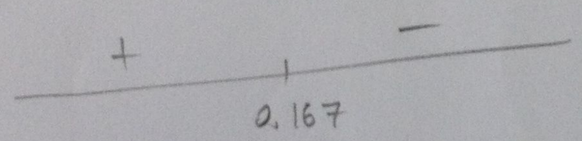
Sinal de $f'(x) = -12x^2 + 4x + 1$



$f'(x) < 0$ em $[1, 2]$



Sinal de $f''(x) = -24x + 4$



$f''(x) \leq 0$ em $[1, 2]$

Escolha de x_0 recai em $x_0 = 2$

x_n	$x_n - 2\varepsilon$	$f(x_n - 2\varepsilon)$	$f'(x_n - 2\varepsilon)$
2	1.998	−19.922087968	−38.912048
1.48602263073	1.48402263073	−5.18452072123	−19.4917874997
1.21803775267	1.21603775267	−1.01931929895	−11.8808227903
1.13024240687	1.12824240687	−0.07059435473	−9.7622015164
1.12101100987	1.11901100987	+0.01854421909	

pare

$$\boxed{\bar{x} = 1.1201100987 \text{ c/ prec } 10^{-3}}$$

Arredondamento (opcional)

x	$f(x)$
1.121	-0.000496244
1.119	$+0.018649364$

ok

$$\boxed{\bar{x} = 1.120 \text{ c/ prec } 10^{-3}}$$

HP: 1,1209482815 2

Q2)

$$\begin{bmatrix} 4.10 & 2.50 & 4.30 & 40.8 \\ 2.30 & 4.60 & 4.00 & 43.8 \\ 4.80 & 6.00 & 6.60 & 68.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4.80 & 6.00 & 6.60 & 68.0 \\ 2.30 & 4.60 & 4.00 & 43.8 \\ 4.10 & 2.50 & 4.30 & 40.8 \end{bmatrix} \quad \cdot(-0.479) \quad (-0.854)$$

$p_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 4.80 & 6.00 & 6.60 & 68.0 \\ 0.479 & 1.73 & 0.840 & 11.2 \\ 0.854 & -2.62 & -1.34 & -17.3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4.80 & 6.00 & 6.60 & 68.0 \\ 0.854 & -2.62 & -1.34 & -17.3 \\ 0.479 & 1.73 & 0.840 & 11.2 \end{bmatrix} \quad \cdot(0.660)$$

$p_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 4.80 & 6.00 & 6.60 & 68.0 \\ 0.854 & -2.62 & -1.34 & -17.3 \\ 0.479 & -0.660 & -0.0440 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$p_2 = 3$

$p_1 = 3$

$$x_3 = \frac{(-0.2)}{(-0.0440)} = 4.55$$

$$x_2 = \frac{(-17.3) - (-1.34)(4.55)}{(-2.62)} = 4.27$$

$$x_1 = \frac{(68.0) - (6.00)\cdot(4.27) - (6.60)(4.55)}{(4.80)} = 2.58$$

$$\boxed{\tilde{x} = \begin{bmatrix} 2.58 \\ 4.27 \\ 4.55 \end{bmatrix}}$$

Q3)

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$ prec. dupla 6 as

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 5.60 \\ 7.00 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.80 & 2.10 & -3.20 \\ -4.60 & 0.800 & -7.40 \\ -2.80 & 4.10 & 2.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34.1 \\ 34.1 \\ -18.3 \end{bmatrix}$$

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 5.60 \\ 7.00 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.59 \\ 5.84 \\ 7.73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.19 \\ -0.24 \\ -0.73 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.19 \\ -0.24 \\ -0.73 \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} -0.24 \\ -0.73 \\ -0.19 \end{bmatrix} \cdot(-0.609) \quad \cdot(-0.826) \qquad \begin{bmatrix} -0.24 \\ -0.584 \\ 0.008 \end{bmatrix} \cdot(-0.399)$$

$$\boxed{\tilde{r}_0 = \begin{bmatrix} -0.24 \\ -0.584 \\ 0.241 \end{bmatrix}}$$

$$c_3 = \frac{(0.241)}{(0.310)} = 0.777$$

$$c_2 = \frac{(-0.584) - (6.51)(0.777)}{(3.61)} = -1.56$$

$$c_1 = \frac{(-0.24) - (0.800)(-1.56) - (-7.40)(0.777)}{(-4.60)} = -1.47$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 34.1 \\ 34.1 \\ -18.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.47 \\ -1.56 \\ 0.777 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.6 \\ 32.5 \\ -17.5 \end{bmatrix}$$

Q4) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $\phi(x) = \dfrac{x^2+1}{3}$

(a) $\phi(x) = x$

$\dfrac{x^2+1}{3} = x$

$x^2+1 = 3x$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$f(x) = 0$

x	$f(x)$
0	1
1/2	

(b) i) $\phi(x) = \dfrac{x^2+1}{3}$ e $\phi'(x) = \dfrac{2x}{3}$ são cont.

em $[0, 1/2]$.

ii) $\max\limits_{[0,1/2]} |\phi'| = \max\limits_{[0,1/2]} \left|\dfrac{2x}{3}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$

iii) Se $x \in [0, 1/2)$ então $x^2+1 \in [1, 5/4]$

e $\dfrac{x^2+1}{3} \in \left[\dfrac{1}{3}, 5/12\right] \subset [0, 1/2]$

(c) $|x_n - \bar{x}| \leq M^n |x_0 - \bar{x}| < 10^{-3}$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n (0.1) < 10^{-3}$ $\Rightarrow n \geq 4.19$

$\boxed{n \geq 5}$