Numérico - Prova 1 2º sem 2012

Questão 1

A função f é composta por duas funções contínuas e diferenciáveis (exponencial e senoidal), logo ela também é contínua e diferenciável. Assim, vamos analisar o comportamento de f.

Temos a derivada $f'(x) = -e^{-x} - \cos x = -(e^{-x} + \cos x)$. Como $|\cos x| \leq 1$, $f'$ é sempre negativa se $e^{-x} > 1 \Rightarrow x < 0$. Porém, se $0 \leq x \leq 1$, $e^{-x} + \cos x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Logo, vemos que $f'$ é sempre negativa para $x \leq 1$, ou seja, f é estritamente decrescente para esses valores de x.

Observamos que $f(0) = 1 > 0$. Como f é estritamente decrescente para $x \leq 1$, $f(x) > 0 \ \forall x \leq 0$. Ainda, $f(1) \cong -0.47 < 0$, logo $f(0) \cdot f(1) < 0$ e, pelo teorema de Bolzano, sabemos que f possui zero no intervalo $I = [0, 1]$. Como vimos, $f(x) > 0 \ \forall x \leq 0$, portanto podemos afirmar que a raiz de f contida em I é a menor raiz da função.

Uma vez que f é estritamente decrescente em I, sabemos que a raiz está isolada em I. Assim, para garantir a convergência do método de Newton, precisamos verificar as hipóteses do teorema da convexidade:

i) $f(0) \cdot f(1) < 0$ (já verificado!)

ii) $f'(x) < 0, \forall x \in I$ (já verificado!)

iii) $f''(x) = e^{-x} + \sin x > 0, \forall x \in I$, pois $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\sin x \geq 0, \forall x \in I$.

A sequência do método será gerada por $\phi(x_{n+1}) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$

$= x_n - \dfrac{e^{-x_n} - \sin x_n}{-e^{-x_n} - \cos x_n}$. Para $x_0 = 0$, $x_1 = \phi(x_0) = 0.5 \in I$.

Logo a convergência está garantida!

## Questão 1 - continuação

Para calcular a raiz $\bar{x}$ desejada, vamos primeiro verificar o tipo de sequência gerada por $\phi$:

| $n$ | $x_n$ | $\phi(x_n)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.5 |
| 1 | 0.5 | 0.586 |
| 2 | 0.586 | 0.588 |

Vemos que a sequência é monotônica crescente.

Para precisão pré-fixada $\delta = 0.001$, temos:

| $n$ | $x_n$ | $x_n + 2\delta$ | $\phi(x_n + 2\delta)$ | $\phi(x_n + 2\delta) \geq x_n + 2\delta$? |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.002 | 0.500499499 | Sim |
| 1 | 0.500499499 | 0.502499499 | 0.585798499 | Sim |
| 2 | 0.585798499 | 0.587798499 | 0.588532528 | Sim |
| 3 | 0.588532528 | 0.590532528 | 0.58853114 | Não |

Portanto $\bar{x} \approx x_3 + \delta = 0.589532528$

## Questão 2

Sendo $p$ uma função contínua e diferenciável, vamos analisar seu comportamento.

A derivada de $p$, $p'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ se anula em dois pontos: $x = -1/3$ e $x = 1$. Temos também que $f'(x) > 0$ para $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 1$, e $f'(x) < 0$ para $-1/3 < x < 1$. Assim, $x = -1/3$ é ponto de máximo local de $f$ e $x = 1$ é ponto de mínimo local de $f$.

Como $p$ é um polinômio de terceiro grau, sabemos que a função tem exatamente uma ou três raízes reais. Vendo que $f(-1/3) < 0$, sabemos que $f$ possui apenas um zero, pois $f$ é crescente para $x < -1/3$ e decrescente para $-1/3 < x < 1$.

Concluímos que a raiz real de $p$ é positiva, pois $f(1) < 0$ e $f$ é estritamente crescente para $x > 1$.

Questão 2 - continuação

Partindo de $p(x)=0$, temos $x^3-x^2-x-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = x^2+x+1 \Leftrightarrow x^3 = x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow x = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = \phi(x)$.

Assim, $\phi$ é ponto fixo de $p$ e agora podemos verificar as hipóteses do teorema do ponto fixo para garantir a convergência do MAS.

Considerando o intervalo $I=[1.5, 2]$, vemos que $f(1.5)\cdot f(2)<0$. Logo a raiz $\bar{x}$ de $p$ está isolada em $I$, uma vez que $p$ é estritamente crescente nesse intervalo. Temos:

i) $\phi$ e $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ contínuas em $I$;

ii) $L = \max_{x\in I} |\phi'(x)| = |\phi'(1.5)| = \frac{20}{27} < 1$

iii) Para $x_0=2$, $\phi(x_0) = 1.75 \in I$.

Garantimos a convergência do método para a raiz $\bar{x}$!

Agora precisamos delimitar o erro absoluto: $|x_n-\bar{x}| \leq L^n |x_0-\bar{x}|$.
Como $\bar{x}\in[1.5,2]$, temos que $|x_0-\bar{x}|\leq 0.5$. Assim, fica:

$L^n|x_0-\bar{x}| < 10^{-5} \Leftrightarrow \left(\frac{20}{27}\right)^n \cdot 0.5 < 10^{-5} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{20}{27}\right) + \ln 0.5 < -5\ln 10$

$\Rightarrow n > 36.053 \Rightarrow n = 37$ iterações.

Calculando 3 iterações para $x_0=2$: $x_1 = \phi(x_0) = 1.75$,
$x_2 = \phi(x_1) = 1.897959184$, $x_3 = \phi(x_2) = 1.804486068$.

Podemos delimitar o erro por $|x_3-\bar{x}| = \frac{L}{1-L}|x_3-x_2| =$

$= 0.267066045$.

## Questão 3

Partindo de $f(x)=0$, vamos verificar que $\phi(x)$ é ponto fixo: $e^x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{e^x}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{e^x}{3}} = \phi(x)$.

Sendo $f$ contínua e diferenciável, vamos analisar seu comportamento. Vemos que $f'(x) = e^x - 6x$ se anula nos intervalos $[0,0.5]$ e $[2.5,3]$, pois $f'(0).f'(0.5)<0$ e $f'(2.5).f'(3)<0$ e, pelo teorema de Bolzano, ela possui pelo menos uma raiz em cada um desses intervalos. Como $f''(x) = e^x - 6$ possui apenas uma raiz real ($x = \ln 6$), pelo teorema de Rolle sabemos que $f'$ possui no máximo duas raízes. Logo $f'$ tem exatamente duas raízes.

Para $x \leq 0$ ou $x \geq 3$, $f'(x) > 0$ e para $x \in [0.5, 2.5]$, $f'(x) < 0$. Dessa forma, $f$ possui ponto de máximo local em $[0,0.5]$ e ponto de mínimo local em $[2.5,3]$. Como $f(0)>0$, $f(0.5)>0$, $f(2.5)<$ e $f(3)<0$, $f$ se anula em $]-\infty,0]$, $[0.5,2.5]$ e $[3,+\infty]$. Restringindo esses intervalos, temos que as raízes de $f$ estão isoladas em $I_1=[-1,0]$ ($f(-1).f(0)<0$), $I_2=[0,1]$ ($f(0).f(1)<0$ e, mesmo que $f$ não seja estritamente decrescente nesse intervalo, sabemos que uma raiz está isolada em $I_2$ pois a menor raiz é menor que zero, estando isolada em $I_1$) e $I_3=[2,3]$ ($f(2).f(3)$ e, mesmo que $f$ não seja estritamente crescente nesse intervalo, as outras duas raízes já foram isoladas em $I_1$ e $I_2$).

As funções $\phi$ e $\phi'(x) = \sqrt{\frac{e^x}{12}}$ são contínuas, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, para determinar quais raízes de $f$ podem ser calculadas, vamos ver $L = \max_{x \in I_i} |\phi'(x)|$, $i=1,2,3$. Para $I_1$, $L = |\phi'(0)| \approx 0,29 < 1$. Para $I_2$, $L = |\phi'(1)| \cong 0.48 < 1$. Para $I_3$, $L = |\phi'(3)| \approx 1,29 > 1$.

Portanto podemos calcular pelo MAJ as raízes contidas

Questão 3 - continuação

em $I_1$ e $I_2$.

Mostramos que o intervalo $I_2=[0,1]$ contém a maior raiz de $f$ que pode ser calculada a partir de $\phi$.

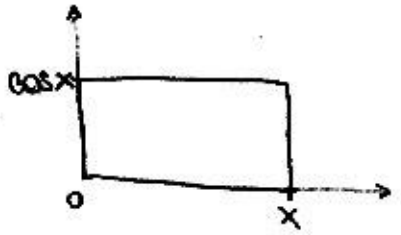
Garantir convergência para $\forall x_0 \in I_2$ significa mostrarmos que, escolhendo o extremo mais próximo da raiz, podemos garantir que toda a sequência gerada por $\phi$ pertence à $I_2$. Assim, seja $m=(0+1)/2=0.5$, temos $f(0)f(m)>0$ e $f(m).f(1)<0$, logo $x_0=1$ está mais próximo da raiz $\bar{x}$. Para $x_0=1$; $\phi(x_0)\cong 0.95 \in I_2$, portanto haverá convergência.

Calculando as iterada a partir de $x_0=0$:

$x_1=\phi(x_0)=0.577350269$, $x_2=\phi(x_1)=0.770565198$.

Delimitando o erro: $|x_2-\bar{x}|=\frac{L}{1-L}|x_2-x_1|$, onde $L=|\phi'(1)|\simeq 0.476 \Rightarrow |x_2-\bar{x}|=0.175477036$.

Questão 4




A área do retângulo é dada por:

$A(x)=x\cos x$

O retângulo tem a maior área quando $\frac{d}{dx}A(x)=0 \Leftrightarrow \cos x - x\sin x = 0$

Vamos, então, utilizar o método de Newton para determinar o valor de $x$ para o qual a função $f(x)=\cos x - x\sin x$, contínua e diferenciável, apresenta zero, com $x\in[0,\pi/2]$.

Vemos que $f(0).f(\pi/2)<0$. Assim, pelo teorema de Bolzano, sabemos que $f$ possui pelo menos uma raiz em

Questão 4 - continuação

$I = [0, \pi/2]$. Olhando a derivada de $f$, $f'(x) = -x\cos x - 2\sin x$, percebemos que $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$. Logo $f$ é decrescente nesse intervalo e temos que a raiz $\bar{x}$ está isolada em $I$.

Para que possamos verificar as hipóteses do teorema da convexidade, vamos restringir um pouco nosso intervalo para evitar problemas em $x=0$. Utilizando o intervalo $I \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, nossa raiz continua isolada, pois $f(\pi/6) f(\pi/2) < 0$ e $f$ é estritamente decrescente em $I$.

A sequência será gerada por $\phi(x_{n+1}) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$

$= x_n + \dfrac{\cos x_n - x_n \sin x_n}{x_n \cos x_n + 2\sin x_n}$. Calcularemos as iteradas até que $|f(x_n)| < 10^{-3}$ a partir de $x_0 = \pi/6$:

$x_1 = \phi(x_0) = 0.9393$, $|f(x_1)| = 0.1678 > 0.001$

$x_2 = \phi(x_1) = 0.8619$, $|f(x_2)| = 0.0033 > 0.001$

$x_3 = \phi(x_2) = 0.8603$, $|f(x_3)| = 0.00001 < 0.001$

Portanto $\bar{x} \approx x_3 = 0.8603$.